

عدم قطعیت اندازه گیری در آزمون و کالیبراسیون



مولفان
احمد محمدی لیواری
مرتضی پویان

بِسْمِ اللَّهِ الرَّحْمَنِ الرَّحِيمِ

عدم قطعیت اندازه‌گیری در آزمون و کالیبراسیون

مؤلفان:

احمد محمدی لیواری

(سازمان ملی استاندارد ایران)

مرتضی پویان

(گروه توزین الکتریک)

سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی

۱۳۹۶

سرشناسه	: محمدی لیواری، احد، ۱۳۴۵.
عنوان و نام پدیدآور	: عدم قطعیت اندازه گیری در آزمون و کالیبراسیون / مولفان احد محمدی لیواری، مرتضی پویان.
مشخصات نشر	: تهران: سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی، ۱۳۹۵.
مشخصات ظاهری	: ۲۶۴ ص.
شابک	: ۹۷۸-۶۰۰-۱۰۲-۹۵۷-۸
وضعیت فهرست نویسی	: فیبا
یادداشت	: کتابنامه: ص. ۲۶۳.
موضوع	: اندازه گیری Measurement
موضوع	: عدم قطعیت اندازه گیری (آمار) Measurement uncertainty (Statistics)
موضوع	: ابزار اندازه گیری- کالیبراسیون Measuring instruments- Calibration
شناسه افزوده	: پویان، مرتضی، ۱۳۴۲.
شناسه افزوده	: سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی
رده بندی کنگره	: ۱۳۹۵ ع ۴/م ۳۰/ت ۵۰
رده بندی دیویی	: ۵۳۰/۸
شماره کتابشناسی ملی	: ۴۳۶۲۵۷۱

عدم قطعیت اندازه گیری در آزمون و کالیبراسیون

مولفان: احد محمدی لیواری- مرتضی پویان

ویراستار: فاطمه سرخانیان دیجوجین

ناشر: سازمان انتشارات جهاد دانشگاهی

چاپ: اول- ۱۳۹۶

شمارگان: ۱۰۰۰ نسخه

قیمت: ۱۲۰۰۰ تومان

شابک: ۹۷۸-۶۰۰-۱۰۲-۹۵۷-۸

این اثر، مشمول قانون حمایت مؤلفان و مصنفان و هنرمندان مصوب ۱۳۴۸ است، هر کسی تمام یا قسمتی از این اثر را بدون اجازه مؤلف (ناشر) نشر یا پخش یا عرضه نماید مورد پیگرد قانونی قرار خواهد گرفت.



سازمان انتشارات

نشانی سازمان انتشارات: تهران- خیابان انقلاب اسلامی- خیابان فخررازی- خیابان شهدای ژاندارمری- پلاک ۷۲، تلفن: ۶۶۹۵۲۹۴۸

مرکز پخش:

خیابان انقلاب - بین فلسطین و چهارراه ولیعصر - جنب مؤسسه نمایشگاه‌های فرهنگی ایران- تلفن: ۶-۶۶۴۸۷۶۲۵

پایگاه اطلاع‌رسانی: www.isba.ir پست الکترونیکی: info@isba.ir فروشگاه اینترنتی: www.Jdbook.ir

بنام یگانه هستی

تقدیم به:

روح پاک پدر عزیزم، بنده مخلص خدا
"حاج حسن پویان"

به مادرم که معنویت و انسانیت را به من آموخت.
به همسر صبور و بردبارم که در فراز و نشیب‌های زندگی
همراهم هست
به برادر عزیزم، همکار همیشگی‌ام که بدون او انجام هیچ کاری
برایم متصور نیست.

و

به امید آنکه فرزندانم "حسین" و "فاطمه" تحقیق و پژوهش
را همواره محور زندگی خود قرار دهند.

مرتضی پویان

تقدیم به:

روح پاک پدرم، جانباز دوران دفاع مقدس به استواری کوه
مادرم به زلالی چشمه
همسرم به صمیمیت باران
دخترانم به طراوت شبنم

و تقدیم به:

روح پاک دوست و همکارم "مقصود بری" که عالمانه به من می‌آموخت

احد محمدی لیواری

فهرست

عنوان	صفحه
پیشگفتار.....	۹
مقدمه.....	۱۱
فصل اول: آزمایش و اندازه‌گیری.....	۱۳
آزمایش.....	۱۵
سیستم‌های اندازه‌گیری.....	۱۷
سیستم SI.....	۱۹
باز تعریف سیستم SI.....	۲۱
فصل دوم: اندازه‌گیری، قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی و عدم قطعیت اندازه‌گیری.....	۲۷
فرآیند اندازه‌گیری.....	۲۷
نیازهای سازمانی به مدیریت اندازه‌شناسی.....	۲۸
الزامات لازم برای تحقق اندازه‌گیری‌ها.....	۲۹
سیستم مدیریت اندازه‌گیری و حوزه فعالیت اندازه‌شناختی.....	۳۰
فرآیندهای اندازه‌گیری.....	۳۰
مدیریت تجهیزات اندازه‌گیری.....	۳۲
فصل سوم: نظریه اندازه‌گیری.....	۳۵
اصول مقدماتی نظریه‌ی اندازه‌گیری.....	۳۸
طبقه‌بندی اندازه‌گیری‌ها.....	۴۰
سیستم‌های اندازه‌گیری و فرآیندهای اندازه‌گیری.....	۴۲
قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی.....	۴۳
قابلیت ردیابی در CIPM-MRA.....	۴۷
فصل چهارم: دستگاه‌های اندازه‌گیری و مشخصات آنها.....	۴۹
انواع دستگاه‌های اندازه‌گیری.....	۴۹

۵۱	 مشخصه‌های عملکردی دستگاه‌های اندازه‌گیری
۵۲	 خطای اندازه‌گیری
۵۳	 شناسائی و حذف خطاهای سیستماتیک
۵۴	 بررسی خطاهای سیستماتیک از دیدگاهی دیگر
۵۵	 مدل‌های ریاضی تجهیزات اندازه‌گیری
۵۶	 تغییرات فرآیند اندازه‌گیری
۵۹	 فصل پنجم: آمار و احتمال
۶۰	 مدل‌های ریاضی و فضای نمونه
۶۲	 پیشامدها
۶۳	 ترکیب پیشامدها
۶۴	 احتمالات
۶۴	 اصول موضوعه احتمال
۶۶	 فضای نمونه با برآمدهایی با احتمال برابر
۶۹	 احتمال شرطی و استقلال
۷۰	 پیشامدهای مستقل
۷۱	 قانون ضرب
۷۳	 قانون احتمال کل
۷۴	 متغیرهای تصادفی
۷۷	 تابع توزیع انباشته متغیر تصادفی گسسته
۷۷	 میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی گسسته
۷۸	 بافت نگار یا هیستوگرام احتمال
۷۹	 متغیرهای تصادفی پیوسته
۷۹	 محاسبه احتمالات با استفاده از تابع چگالی احتمال
۸۱	 تابع توزیع انباشته یک متغیر تصادفی پیوسته
۸۲	 میانگین واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته
۸۳	 تابع خطی متغیرهای تصادفی
۸۵	 نمونه‌های تصادفی ساده و مستقل
۸۶	 توزیع دو جمله‌ای
۸۷	 توزیع پواسون
۸۸	 توزیع نرمال
۹۳	 تابع توزیع t

انحراف معیار میانگین (SDOM)	۹۸
انحراف معیار ادغام شده	۱۰۰
تابع احتمال مستطیلی	۱۰۱
کاربرد توزیع مستطیلی	۱۰۳
تابع احتمال مثلثی	۱۰۳
تابع توزیع U شکل	۱۰۵
تابع احتمال ذوزنقه‌ای	۱۰۶
رویکردهای مختلف در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری	۱۰۸
فصل ششم: راهنمای بیان عدم قطعیت در اندازه‌گیری (GUM)	۱۱۱
مفاهیم اصلی GUM	۱۱۳
مروری بر راهنمای GUM	۱۱۴
ویرایش جدید GUM	۱۱۵
اصول کلی برآورد عدم قطعیت در GUM	۱۱۶
قانون جمع واریانس‌ها در اندازه‌گیری مستقیم	۱۲۰
قانون جمع واریانس، مدل کلی	۱۲۰
همبستگی خطاها، اندازه‌گیری مستقیم	۱۲۱
عدم قطعیت مرکب	۱۲۳
ایجاد همبستگی‌ها	۱۲۴
ارزیابی نوع A عدم قطعیت اندازه‌گیری	۱۲۵
ارزیابی نوع A عدم قطعیت استاندارد	۱۲۷
ارزیابی نوع B عدم قطعیت استاندارد	۱۲۸
فصل هفتم: ارزیابی داده‌های اندازه‌گیری	۱۳۱
ارقام معنادار در محاسبات	۱۳۱
ارزیابی اعتبار مقادیر کرانه‌ای نتایج اندازه‌گیری	۱۳۳
داده پرت	۱۳۳
حذف داده‌های پرت	۱۳۴
آزمون تامسون	۱۳۶
ارزیابی میانگین‌های دو سری نتیجه‌ی اندازه‌گیری	۱۳۶
دو میانگین به دست آمده از یک منبع	۱۳۸
انحراف معیار دو میانگین	۱۳۸

آزمون برای دو میانگین از نمونه‌هایی با اندازه‌های کوچک‌تر	۱۳۹
انحراف معیار و میانگین، دو میانگین	۱۴۰
آزمون دو میانگین حاصل از منابع مختلف	۱۴۳
مقایسه انحراف معیارهای مربوط به دو مجموعه نتیجه اندازه‌گیری	۱۴۶
فصل هشتم: مثال‌ها	۱۴۹
اصطلاحات و واژه‌های عمومی اندازه‌شناسی	۲۳۷
منابع	۲۴۷

پیشگفتار

اندازه‌گیری‌هایی که در آزمایشگاه‌های آزمون و کالیبراسیون هر کشوری انجام می‌شود به همراه سیستم کیفیت و گواهی محصول آن کشور، ممکن است در کشورهای دیگر مورد پذیرش قرار نگیرد. این مشکل را سازمان جهانی تجارت (WTO) موانع فنی تجارت (TBT) می‌نامد که در کشورهای عضو این سازمان مورد توجه قرار گرفته است. در حال حاضر سازوکار مورد قبول در پذیرش متقابل نتایج آزمون و گواهی محصول، اطمینان مشتری از صلاحیت فنی آزمایشگاه‌ها و توانمندی سیستم‌های کیفیت و اندازه‌گیری‌ها و نهادهایی است که در گواهی محصول فعالیت دارند. این موضوع سبب شکل‌گیری ساختار ارزیابی انطباق یکسانی در کشورهای عضو WTO شده است. اجزا این ساختار عبارتند از:

الف- آزمایشگاه‌های آزمون و کالیبراسیون باید مطابق الزامات استاندارد بین‌المللی ISO/IEC 17025 عمل کنند و نهاد ملی تایید صلاحیت، صلاحیت فنی آن‌ها را تایید کند. نهادهای تایید صلاحیت از طریق ترتیبات به رسمیت شناختن چند جانبه (MRA) و تحت نظارت اتحادیه بین‌المللی تایید صلاحیت آزمایشگاه (ILAC) فعالیت‌های خود را هماهنگ می‌کنند؛

ب- سازمان‌های ارائه‌دهنده خدمات و تولیدکنندگان باید در سیستم مدیریت کیفیت خود به الزامات مشتری مطابق استانداردهای بین‌المللی ISO 9000 توجه داشته باشند و باید توسط نهادهای تایید صلاحیت اعتباردهی گردند. همچنین انطباق کیفیت محصول با مشخصات آن باید با آزمون محصول توسط نهادهای گواهی محصول تایید شود.

آزمایشگاه‌های آزمون و کالیبراسیون به همراه ساختارهای اندازه‌شناختی سازمان‌های خدماتی و تولیدکنندگان از عوامل مهمی در کمک به فرایند تولید محصولات با کیفیت هستند. برای حصول اطمینان از کیفیت محصول، لازم است که در مراحل مختلف تولید، ارزیابی محصول انجام شود و اندازه‌گیری‌ها نقش کلیدی در فرآیندهای ارزیابی به عهده دارند. بنابراین اطلاع داشتن از کیفیت نتایج اندازه‌گیری بسیار مهم است. کیفیت نتایج اندازه‌گیری با عدم قطعیت آن مشخص می‌شود. هر نتیجه‌ی اندازه‌گیری بدون عدم قطعیت کامل نبوده و کاربردی در تصمیم‌گیری‌هایی که از روی تحلیل داده‌ها صورت می‌پذیرد، نخواهد داشت.

دلایل اهمیت عدم قطعیت اندازه‌گیری:

۱- گزارش‌های آزمون و گواهی‌نامه‌های کالیبراسیون زمانی قابل پذیرش‌اند که به همراه عدم قطعیت باشد؛

۲- با توجه به رشد جهانی اندازه‌شناسی در شیمی، برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری‌های این حوزه ضروری است؛

۳- برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری در بسیاری از استانداردهای بین‌المللی ضروری و اجباری شده است.

کتاب حاضر نتیجه‌ی سال‌ها تجربه و تدریس دوره‌های مختلف برآورد عدم قطعیت در آزمایشگاه‌های آزمون و کالیبراسیون و صنایع مختلف است. با توجه به این که به مباحث مهم و مرتبطی مانند قابلیت ردیابی نتایج اندازه‌گیری در آن توجه شده است، امیدواریم بتواند پاسخگوی بخشی از نیازهای خوانندگان محترم باشد و برای اندازه‌شناسان، مهندسين، فعالان سیستم‌های کیفیت، دانشجویان و کسانی که در آزمایشگاه‌های آزمون و کالیبراسیون مشغولند، مفید باشد.

احمد محمدی لیواری

(سازمان ملی استاندارد ایران)

مرتضی پویان

(گروه توزین الکتریک)

پاییز ۱۳۹۶

مقدمه

ما در عصر احتمال به سر می بریم
در عصر شک و شاید
در عصر پیش بینی وضع هوا
از هر طرف که باد بیايد
در عصر قاطعیت تردید
عصر جدید
عصری که هیچ اصلی
جز اصل احتمال، یقینی نیست
"قیصر امین پور"

اینشتین در پاسخ به تذکر دستیار خود که سئوالات امتحانی امسال همان سئوالات سال گذشته است، چنین می گوید: "درست است اما همه ی پاسخ های امسال با سال گذشته تفاوت دارد." بی شک رفتار دستگاه های اندازه گیری هم چنین است و نسبت به زمان ثابت نمی ماند. همیشه نتایج حاصل از تکرار اندازه گیری یک اندازه ده ثابت - چه زمانی که فرآیند اندازه گیری مشابه است و چه زمانی که فرآیند اندازه گیری تغییر می کند - کاملاً با هم سازگار نیستند. بنابراین به این سؤال اساسی همواره باید توجه نمود که: چگونه می توان مطمئن شد که دستگاه ها و سیستم های اندازه گیری برای اهداف مورد نظر مناسب هستند؟

ممکن است راه اندازی یک دستگاه اندازه گیری با فشار دادن یک دکمه و یا با کلیک روی مانیتور انجام شود. احتمال دارد نتیجه ی اندازه گیری با روش های قدیمی از روی صفحه مدرج و یا به صورت دیجیتالی قرائت گردد؛ تنها چیزی که در حال حاضر تغییر کرده روش تفسیر داده های اندازه گیری است. در حال حاضر یک جابجایی در تفسیر داده ها از رویکرد خطا - که گاهی رویکرد سنتی یا رویکرد مقدار واقعی نامیده می شود - به رویکرد عدم قطعیت اتفاق افتاده است. هدف از اندازه گیری در رویکرد خطا عبارت است از: تعیین برآوردی از مقدار واقعی اندازه ده به طوری که تا حد ممکن به تک مقدار واقعی نزدیک باشد. هدف از اندازه گیری در رویکرد عدم قطعیت، تعیین مقدار واقعی تا جایی که به آن نزدیک باشد، نیست بلکه فرض می شود که داده های اندازه گیری تنها اجازه ی تخصیص بازه ای از مقادیر منطقی را به اندازه ده با این فرض دارند که در انجام اندازه گیری اشتباهی رخ نداده است. اطلاعات مربوط اضافی ممکن است گستره ی بازه مقادیری را که می توان به طور منطقی به اندازه ده نسبت داد

کاهش دهد ولی به دلیل وجود محدودیت در تعریف اندازه‌ده، اندازه‌گیری نمی‌تواند این بازه را به یک تک مقدار تقلیل دهد.

ارزیابی عدم قطعیت یکی از چالش‌های اصلی در مدیریت است، مانند: عدم قطعیت‌های تجارت، عدم قطعیت‌های اقتصادی، عدم قطعیت در تغییرات فناوری، عدم قطعیت‌های سیاسی. عدم قطعیت وقتی مطرح می‌شود که با تعدادی اعداد مربوط به برآمدهای ممکن و تصمیم‌گیری بر مبنای احتمال این برآمدها سروکار داشته باشیم. نظریه آمار و احتمال ابزار لازم در برآورد عدم قطعیت و کمینه‌سازی ریسک‌های مرتبط با عدم قطعیت است. برای اولین بار تقریباً ۲۳۰۰ سال پیش ارسطو از واژه‌ی عدم قطعیت استفاده نموده است. با این وجود تا اواخر قرن هجده از اثرات خطاهای اندازه‌گیری صرف‌نظر می‌شد. در ۶۰ سال گذشته، نظریه آمار و احتمال به کمک تعیین بزرگی مولفه‌های دخیل در عدم قطعیت آمده است. این موضوع در واقع به دلیل تسلط تفکر آماری بر تمام علوم تجربی است. در حقیقت آمار و احتمال، علم عدم قطعیت است و قواعد تعیین و تحلیل خطاهای اندازه‌گیری را معین می‌کند.

به عدم قطعیت نتایج اندازه‌گیری نه تنها مدیران، اندازه‌شناسان و فعالان کیفیت بلکه مصرف‌کنندگان عادی هم نیاز دارند و به آن باید توجه کنند. اندازه‌گیری‌ها به صور مختلف بر زندگی انسان‌ها تاثیر می‌گذارند. در صنایع، پایش کیفیت محصولات توسط تجهیزات اندازه‌گیری صورت می‌پذیرد. در آزمایشگاه‌های کالیبراسیون ارزیابی عملکرد تجهیزات اندازه‌گیری به وسیله‌ی مقایسه با استانداردهای اندازه‌گیری انجام می‌شود. در آزمایشگاه‌های آزمون ویژگی محصولات با اندازه‌گیری مشخصات آن‌ها تعیین می‌شود. هر نتیجه‌ی اندازه‌گیری بدون عدم قطعیت آن کامل نیست. قابلیت پذیرش هر سیستم اندازه‌گیری به عدم قطعیت آن بستگی دارد. بنابراین عدم قطعیت اندازه‌گیری نقش مهمی در آزمایشگاه‌های آزمون، کالیبراسیون و صنایع و تصمیم‌گیری‌های مرتبط به عهده دارد. یک درک روشن از عدم قطعیت اندازه‌گیری برای طراحان سیستم‌های اندازه‌گیری، کاربران و کسانی که براساس نتایج اندازه‌گیری اقدام به تصمیم‌گیری می‌کنند، بسیار ضروری است.

به دلیل گستردگی مطالب مرتبط، مباحثی که نگارندگان در کتاب حاضر به آن پرداخته‌اند عبارتند از:

فصل اول: آزمایش و اندازه‌گیری

فصل دوم: اندازه‌گیری، قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی و عدم قطعیت اندازه‌گیری

فصل سوم: نظریه اندازه‌گیری

فصل چهارم: دستگاه‌های اندازه‌گیری و مشخصات آن‌ها

فصل پنجم: آمار و احتمال

فصل ششم: راهنمای بیان عدم قطعیت در اندازه‌گیری (GUM)

فصل هفتم: ارزیابی داده‌های اندازه‌گیری

فصل هشتم: مثال‌ها

خوانندگان آگاه به اصول و مبانی اولیه اندازه‌شناسی، می‌توانند برای آشنایی با روش‌های برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری از فصل پنجم کتاب آغاز نمایند. امیدواریم مطالب کتاب حاضر برای خوانندگان محترم مفید واقع شود و منتظر پیشنهادات و نظرات سازنده‌ی شما برای ویرایش‌های بعدی کتاب هستیم.

فصل اول

آزمایش و اندازه‌گیری

هر آزمایش سئوالی است که علم از طبیعت می‌پرسد و هر

اندازه‌گیری ثبت پاسخ طبیعت است.

"ماکس پلانک"

هر اندازه‌گیری باعث می‌شود که سیستم به یکی از ویژه حالت‌های

متغیر دینامیکی که اندازه‌گیری می‌شود، برود.

"دیراک"

در علوم تجربی شاید اولین پرسشی که می‌توان مطرح کرد این است که چرا ما دست به آزمایش می‌زنیم؟ در پاسخ باید گفت: آزمایش‌ها بخشی از فرایند پیش‌بینی‌های نظری هستند و بدون آزمایش، نتایجی در دسترس نیست. با نبود نتایج تجربی، اساس و پایه‌ای برای دانشمندان یا مهندسين برای بررسی یک نظریه وجود ندارد. پیشرفت و ترقی فرهنگ و تمدن بستگی به آزمایش‌هایی دارد که با خود فناوری نوین به همراه می‌آورد.

اگر نظریه به تنهایی می‌توانست همه چیز را پیش‌بینی کند، دیگر نیازی به آزمایش نبود. به طور کلی یکی از اهداف بشر فهم و درک بهتر دنیا است. اگر کسی همه چیز را درباره طبیعت بداند، نیازی به آزمایش نخواهد داشت. شاید بتوان همه چیز را درباره سیستم‌های جبری و موجییتی پیش‌بینی نمود، اما این همه‌ی حقیقت امر نیست؛ زیرا هیچگاه آگاهی‌های ما کامل نیست و همواره نیاز به آزمایش داریم. سؤال اصلی این است که آزمایش‌ها در فرآیند فهم و درک ما چه نقشی ایفا می‌کنند؟ در یونان باستان برای پاسخ به این سؤال دو مکتب با دیدگاه‌های کاملاً متضاد پدید آمد- که در عصر حاضر هنوز هم به شکل‌های دیگر این دیدگاه‌ها وجود دارند- افلاطون (۴۲۸-۳۷۴ ق. م) این نظر را توسعه داد که بالاترین درجه واقعیت وقتی قابل حصول است که

انسان‌ها به دلایل فکر کنند. او اعتقاد داشت که فهم بهتر تنها از طریق عقل امکان پذیر است. این مکتب به عقل‌گرایی معروف شده است. ارسطو (۳۸۴-۳۲۲ ق. م) بر این باور بود که بالاترین درجه واقعیت درکی است که از حواس حاصل می‌شود. وی استدلال کرد که فهم بهتر از طریق مشاهده دقیق حاصل می‌شود. این رویکرد به تجربه‌گرایی معروف شده است. تجربه‌گرایی مدعی است علم از مفاهیمی که توسط آزمایش تجربی آشکار می‌شوند پدید می‌آید و به آن نیز محدود می‌شود. امروزه مشخص شده است که هر دو رویکرد نقش مهمی را در پیشرفت فهم علمی بازی می‌کنند. یکی از فیلسوفان علم قرن حاضر^۱ معتقد است دو اصل مهم در باره‌ی نقش آزمایش وجود دارد:

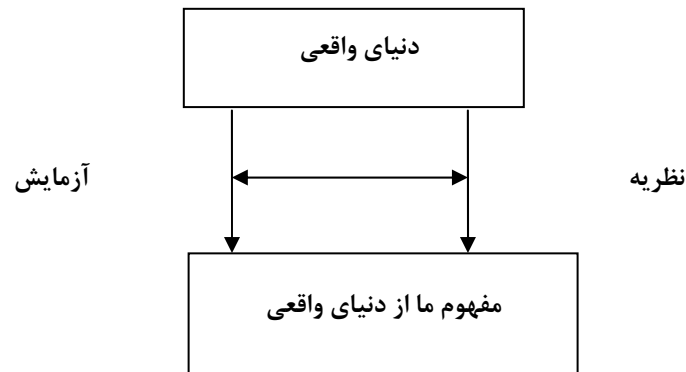
الف) استدلال و استقرا؛

ب) خطا پذیری.

اصل استقرا، فرآیندی است که به موجب آن قوانین و نظریه‌های طبیعت براساس آزمایش‌های انجام یافته، حاصل می‌شود. به عبارت دیگر بخش اعظمی از نظریه‌های مربوط به فهم و درک طبیعت از استقرار به وجود می‌آید. براساس اصل خطا پذیری آزمایش‌ها انجام می‌شوند تا فرضیات صحت‌گذاری شوند. فرضیاتی که مورد تأیید آزمایش‌ها قرار نگیرند، مردودند. این آزمایش‌ها قوانینی را موجب نمی‌شوند و فرضیه‌ای را رد نمی‌کنند؛ اما برای ما نمایش‌های مفیدی از طبیعت را سبب می‌شوند و یا توصیفاتی از طبیعت را حذف می‌نمایند. آزمون‌ها (Tests) جزء این گروه از آزمایش‌ها هستند.

این دو رویکرد از مولفه‌های اصلی روش علمی‌اند. افتخار این صورت‌بندی را معمولاً به فرانسیس بیکن (۱۵۶۱-۱۶۲۶م) نسبت می‌دهند؛ البته بذره‌های اولیه‌ی علم تجربی از آن راجر بیکن (۱۲۹۲-۱۳۲۰م) است. امروزه روش علمی برای صحت‌گذاری فرضیه‌ها و یا تعیین گستره صحیح بودن آن‌ها به کار می‌رود.

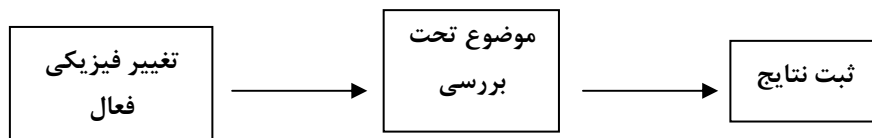
1- Horace Romano Harré



مطابق شکل فوق، مفهوم دنیای واقعی از طریق داده‌های حاصل از آزمایش‌ها توسعه می‌یابد. نظریه‌ها ساختار توصیف مشاهدات را شکل می‌دهند. معمولاً نتایج آزمایش جدید، نظریه‌ها را توسعه می‌بخشد و نظریه‌های جدید، راهنما و محرک آزمایش‌های جدید است.

آزمایش

آزمایش فعالیتی است که در آن به طور فیزیکی در موضوع تحت بررسی تغییراتی اعمال و نتایج حاصل از این مداخله ثبت می‌شود. این عمل به صورت زیر می‌باشد.



در هر آزمایش با روشی فعال، تغییرات فیزیکی فرآیند مورد مطالعه قرار گرفته و سپس نتایج حاصل از تغییرات ثبت می‌شود. با این تعریف، محاسبات شبیه‌سازی‌های کامپیوتری و همچنین مشاهده‌ی فرآیندهایی که یک بار اتفاق می‌افتد آزمایش محسوب نمی‌شوند. یک ستاره‌شناس هرگز مسیر سیاره‌ای را تغییر نمی‌دهد، بنابراین او آزمایشی را انجام نمی‌دهد و صرفاً یک مشاهده‌گر است. یک آناتومیست درباره‌ی چیزهایی بحث می‌کند - که در آن‌ها تغییر فیزیکی صورت نمی‌پذیرد - نیز یک مشاهده‌گر است. از خلال برهم‌کنش بین مشاهده - آزمایش است که فهم جهان بهبود می‌یابد. بنابراین وجود تمام اجزاء و مولفه‌های فرآیند آزمایش ضروری است. نظریه وجود نتایج را توصیف و نتایج جدید را پیش‌بینی می‌نماید. آزمایش وجود نظریه را تصدیق و نتایج

دیگری را برای تعریف مجدد نظریه گردآوری می‌کند.

در انجام آزمایش، شناسایی تمام متغیرهای موجود ضروری است. متغیرها شامل آن کمیت‌های فیزیکی است که در حین آزمایش می‌توانند تغییر کنند و بر آزمایش تاثیرگذار باشند. متغیرها به سه گروه مستقل، وابسته و ناشناخته - که قابل کنترل نیست و بر مقدار اندازه‌ده اثرگذار است - تقسیم می‌شوند. متغیرهای ناشناخته در تمام آزمایش‌ها حضور دارند و می‌توانند موجب عدم کنترل کامل آزمایش شوند. این عدم توانایی در کنترل دقیق تمام متغیرها، اولین منبع عدم قطعیت تجربی است.

متغیرهایی که بصورت فعال^۱ و یا غیر فعال^۲ در طی آزمایش ثابتند "پارامتر" نامیده می‌شوند. گاهی اوقات پارامتر می‌تواند تابع خاصی از متغیرها باشد. بعنوان مثال عدد "رینولدز" که عدد بدون بعدی است و در مکانیک سیالات مورد استفاده قرار می‌گیرد؛ می‌تواند در یک آزمایش، پارامتر باشد. عدد رینولدز بدین صورت تعریف می‌شود:

$$Re = \rho u d / \mu$$

که u سرعت سیال؛

d طول ویژه؛

ρ و μ به ترتیب "چگالی" و "ویسکوزیته" مطلق سیالند.

اندازه‌گیری‌ها می‌توانند با تعدادی آزمایش و با مقادیر مختلف d, ρ, U و μ انجام شوند. فرض کنید آزمایشی به منظور تحقیق درباره وجود و یا عدم وجود جریان لایه‌ای در لوله مستقیمی طراحی شده است. اگر جریان لایه‌ای وجود داشته باشد در این صورت طبق قانون بقای اندازه حرکت: $\Delta P = 8QL\mu/(\pi R^4)$ که ΔP اختلاف فشار بین دو نقطه از لوله به طول L و شعاع R است. برای مایعی با ویسکوزیته مطلق μ ، آهنگ جریان حجمی Q است. در این آزمایش آهنگ جریان حجمی تغییر می‌نماید، بنابراین μ ، R و L پارامتر هستند، Q متغیر مستقل و ΔP متغیر وابسته است. همچنین R ، L ، Q و ΔP اندازه ده هستند. ویسکوزیته که متغیر وابسته است با دمای جریان (اندازه ده و پارامتر دیگر) محاسبه می‌شود. اگر در این آزمایش سیال تحت کنترل نباشد بر مقادیر چگالی و ویسکوزیته و در نتیجه بر متغیرهای وابسته اثر خواهد گذاشت.

اصولاً شناسایی و کنترل همه متغیرهایی که بر نتایج آزمایش موثرند، مشکل است. آزمایش‌های مربوط به سیستم‌های بیولوژی نیز شامل این گروه می‌شوند. در این حالت تکرار آزمایش برای برآورد آماری متغیرهایی نظیر مقادیر میانگین و انحراف معیار صورت می‌پذیرد. عمل اندازه‌گیری را می‌توان تا عهد فنقی‌ها که در اطراف دریای مدیترانه به داد و ستد

1- Active

2- Passive

می‌پرداختند، ردیابی نمود. می‌دانیم که تمام اندازه‌گیری‌ها نسبی‌اند و در مقایسه با یک سری استاندارد‌ها انجام می‌شوند. شاید این ضرب‌المثل را شنیده‌اید که: "Measure it twice and cut it once" این عبارت از دیدگاه اقتصادی مفاهیم مهمی را دربردارد. اندازه‌گیری - که با دقت و درستی کافی انجام می‌پذیرد - ضایعات را کاسته و در تولید اقلام با کیفیت، مشارکت بیشتری خواهد داشت. قیمت‌ها بر رقابت شرکت‌ها در فروش و جلب مشتریان بیشتر اثر می‌گذارد. این رقابت، بسیار شدید و جهانی است. بنابراین یک خطای ساده در تنظیم دستگاهی، منجر به افزایش هزینه‌ها و زیان‌های فراوان می‌گردد. در این ارتباط موتو^۱ می‌گوید "به همان خوبی که اندازه‌گیری می‌کنید، می‌توانید تولید کنید".

سیستم‌های اندازه‌گیری

ما در دنیایی زندگی می‌کنیم که با اعداد و یکاها سروکار داریم. به‌عنوان نمونه در علوم کامپیوتر مودم‌هایی با سرعت ۵۱۲ کیلوبایت بر ثانیه، هارد ۵۰۰ گیگا بایتی، CD با ظرفیت ۷۰۰ مگابایت و یا خودرویی با سرعت ۱۲۰ km/h و ... اگر فردی از قرن نوزدهم این عبارات را بشنود چیزی از آنها نخواهد فهمید، گویی ما با زبان دیگری با او صحبت می‌کنیم. در کشورهای معدودی مانند آمریکا هنوز هم با دو زبان یعنی سیستم "متریک" و سیستم "انگلیسی" صحبت می‌شود. این دوگانگی سبب اشتباهاتی هم می‌شود. مثالی که در این باره می‌توان ارایه داد، ضرر ۱۲۵ میلیون دلاری در انفجار ماهواره‌ای بود که در ۲۳ سپتامبر سال ۱۹۹۹ برای بررسی وضعیت آب و هوای مریخ پرتاب شد. گروهی از دانشمندان، محاسبات خود را برای تعیین مقدار سوخت ماهواره برحسب پوند انجام داده بودند؛ اما سازمان ناسا تصور کرده بود که محاسبات بر حسب نیوتون صورت پذیرفته و این موضوع سبب بروز اختلافی در حدود ۱۰۰ مایل در محاسبه مدار ماهواره شد که نهایتاً ماهواره هنگام قرار گرفتن در مدار خود آتش گرفت.

سیستم یکاهای انگلیسی در طول قرن‌ها و به تدریج و از آغاز آن در عصر بابلی‌ها که بعدها توسط مصریان، یونانیان، رومیان، انگلو ساکسون‌ها و فرانسویان به کار رفت، توسعه یافت و تکمیل شد. این سیستم براساس پیشنهاد رومیان، برمنبای عدد ۱۲ بنا شد. یک "Pes" رومی (foot) ۱۲ برابر "uncia" رومی (Inch) است. این مبنا تا قرن ۱۵؛ یعنی، تا زمانی که استانداردسازی یکاهایی مانند طول آغاز شد، ادامه یافت. به عنوان نمونه یارد (Yard) توسط پادشاه ساکسون‌ها پایه‌گذاری گردید و شاه ادگار، استاندارد اندازه‌گیری آن را پیشنهاد کرد. او اعلام نمود که یارد فاصله امتداد بین بینی و انگشتان او است. از استانداردهای سلطنتی دیگر می‌توان به ملکه الیزابت اول اشاره نمود.

1- Motto

وی اعلام کرد که من "state mile" را به صورت ۵۲۸۰ feet، به جای mile رومی جایگزین کردم. سیستم متریک برخلاف سیستم انگلیسی، براساس یک رویکرد علمی و منطقی، توسعه و گسترش یافته است. در سال ۱۶۷۰ میلادی سیستم "decimal" مطابق طول انحنای (arc) یک دایره از دایره عظیمه‌ی زمین توسط گابریل مونتون به وجود آمد. در سال ۱۶۷۱ میلادی، جین پیکارد استاندارد طول را برحسب طول آونگ یک ساعت که زمان تناوب آن مقدار ویژه‌ای داشت، تعریف نمود. در سال ۱۷۹۰ میلادی آکادمی علوم فرانسه به توسعه و فرمول بندی سیستم decimal براساس یکاهای طول، جرم و حجم پرداخت. یکای طول (متر) یک ده میلیونوم فاصله قطب شمال تا خط استوا در امتداد خط نصف النهار حرکت دورانی زمین، یکای جرم (گرم)، جرم یک سانتی متر مکعب آب - در دمایی که بیشینه‌ی چگالی را دارد- و یکای حجم (لیتر) یک دسی متر مکعب، تعریف شد.

در این رویکرد، جرم و حجم بعنوان یکاهای تکمیلی و برحسب یکای اصلی متر تعریف و برقرار گردید. در این سیستم از استانداردهای فیزیکی (از ویژگی‌های زمین) استفاده شده بود. در سال ۱۸۷۵ میلادی، هفده کشور کنوانسیون متر را در فرانسه امضا کردند. بر مبنای این کنوانسیون استانداردهای بین‌المللی به صورت دائمی ایجاد گردیدند. این استانداردها در ابتدا شامل طول و جرم بودند. در سال ۱۸۶۶ میلادی، کنگره آمریکا استفاده از سیستم متریک را در آمریکا و در عقد قراردادهای خرید و فروش و مذاکرات هیئت‌های قضایی مجاز اعلام کرد و پیرو آن در سال ۱۸۹۳ یکاهای آمریکا - که بر مبنای سیستم انگلیسی بود- مطابق استانداردهای سیستم متریک مجدداً تعریف شدند. یارد دقیقاً برابر ۰/۹۱۴۴ متر (و در نتیجه $1 \text{ foot} = 0.3048 \text{ m}$ و $1 \text{ inch} = 0.0254 \text{ m}$) و پوند دقیقاً برابر ۰/۴۵۳۵۹۲ کیلوگرم تعریف شد. این سیستم در سال ۱۹۶۰ میلادی، تحت عنوان "سیستم بین‌المللی یکاها" SI مورد پذیرش جهانی قرار گرفت.

در جدول زیر پنج سیستم یکاها را که مورد استفاده قرار می‌گیرند، مشاهده می‌کنید. سیستم مهندسی انگلیسی (استاندارد مهندسی USA یا انگلیسی قدیم) و سیستم انگلیسی فنی (سیستم عادی USA) هنوز هم در برخی از صنایع استفاده می‌شوند. سیستم‌های متریک مطلق و انگلیسی مطلق هم در بعضی از نشریات به کار می‌روند.

سیستم انگلیسی فنی (TE)	سیستم انگلیسی مطلق (AE)	سیستم انگلیسی مهندسی (EE)	سیستم متریک مطلق (CGS)	SI	کمیت
فوت	فوت	فوت	سانتی‌متر	متر	طول
ثانیه	ثانیه	ثانیه	ثانیه	ثانیه	زمان
slug	lbm	Pound mass(lbm)	گرم	کیلوگرم	جرم
lbf	poundal	Pound force(lbf)	دین	نیوتون	نیرو

کمیت‌های فیزیکی با دیمانسیون‌های مختلف از طریق تعاریف یا برخی از قوانین فیزیکی به همدیگر مرتبط می‌شوند. به عنوان نمونه در قانون دوم نیوتون یعنی $F=ma$ ، نیروی $۹/۸۱$ نیوتونی (البته دقیقاً $۹/۸۰۶۶۵$ نیوتون) لازم است تا جسم یک کیلوگرمی شتاب $۹/۸ \text{ m/s}^2$ اختیار کند. درحقیقت معادله $F=ma$ از دو معادله تشکیل شده است، معادله عددی که فقط شامل مقادیر عددی کمیت‌های فیزیکی‌اند، $۹/۸۱ \times ۹/۸ = ۱$ و معادله‌ی یکا.

سیستم SI

اندازه‌گیری‌های مدرن براساس هفت کمیت اصلی سیستم SI صورت می‌پذیرند. علاوه بر کمیت‌های اصلی، کمیت‌های فرعی - که از ترکیب کمیت‌های اصلی حاصل می‌شوند - به کمک اندازه‌گیری‌ها می‌آیند. به طور کلی کمیت‌های اصلی و فرعی سه مرحله را پشت سر می‌گذارند تا مورد استفاده قرار گیرند. این سه مرحله عبارتند از: توصیف، تعریف و پدیدآوری یکای اندازه‌گیری. کمیت‌های اصلی مستقل از هم هستند. اما در پدیدآوری آن‌ها ممکن است از سایر کمیت‌های اصلی استفاده شود؛ به عنوان مثال، در پدیدآوری متر از ثانیه، در پدیدآوری آمپر از متر، کیلوگرم و ثانیه، در پدیدآوری مول از کیلوگرم و در پدیدآوری کاندلا از متر، ثانیه و کیلوگرم استفاده می‌شود. یکی از ویژگی‌های مهم یکاهای فرعی سیستم SI سازگاری^۱ و هماهنگی^۲ آن‌ها است. به عنوان مثال، متر برثانیه یکای فرعی هماهنگ برای سرعت است. تعاریف یکاها باید شرایط زیر را دارا باشند:

- کمیت توصیفی باید در جابجایی‌های مکانی و زمانی تغییر نکند؛
- پدیدآوری آن در هر مکان و زمانی امکان پذیر باشد؛
- پدیدآوری آن هر جایی که نیاز باشد مانند علوم، فناوری و اقتصاد، سهل الوصول باشد؛

1- Consistent
2- Coherent

● پیوستگی تعریف آن حفظ شود به عبارت دیگر در تعاریف جدید سازگاری آن پابرجا بماند.

سیستم SI در یازدهمین مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها (CGMP) در سال ۱۹۶۰ میلادی برای برقراری یک سیستم مدرن - که پاسخگوی نیازهای علم و فناوری باشد - بوجود آمد. در سال ۱۹۶۴ میلادی، کمیته بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها (CIPM) کمیته‌های مشورتی را جهت ارایه مشاوره‌های لازم به SI تشکیل داد. مهم‌ترین وظیفه این کمیته‌ها تهیه متون رسمی و بروشوری به نام "سیستم بین‌المللی یکاها SI" است. آخرین ویرایش این بروشور از پایگاه اطلاع رسانی دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها^۱ به صورت رایگان قابل دسترسی است. این بروشور به دو زبان انگلیسی و فرانسوی منتشر می‌شود و ویرایش فرانسوی آن رسمی است.

نام "سیستم بین‌المللی یکاها SI" که در یازدهمین مجمع CGPM در سال ۱۹۶۰ انتخاب شد، حاصل سال‌ها بحث و تبادل نظر بود. به خلاصه‌ای از رویدادهایی که به سیستم SI منجر شد، اشاره می‌شود.

✓ ایجاد سیستم متریک decimal در انقلاب فرانسه اتفاق افتاد. در این سیستم دو استاندارد پلاتینی برای متر و کیلوگرم در بیست و دوم ژوئن سال ۱۷۹۹ میلادی تهیه شد.

✓ در سال ۱۸۳۲ کارل فردریش گوس، به ترویج سیستم متریک و سیستم ثانویه فضایی بعنوان سیستم یکاهای هماهنگ در علوم فیزیکی پرداخت. وی برای اولین بار به اندازه‌گیری مطلق میدان مغناطیسی زمین در سیستم decimal و برحسب یکاهای مکانیکی میلی‌متر، گرم و ثانیه اقدام کرد و سال بعد با همکاری "وبر" این اندازه‌گیری‌ها را به پدیده‌های الکتریکی توسعه داد.

✓ "ماکسول" و "لرد کلوین" در سال ۱۸۶۰ میلادی در انجمن توسعه علوم انگلیس (BAAS) این کاربردها را به حوزه الکتریسته و مغناطیس توسعه دادند. آنها الزامات یک سیستم یکاهای هماهنگ را براساس یکاهای اصلی و فرعی پایه‌گذاری کردند. در سال ۱۸۷۴ انجمن توسعه علوم انگلیس سیستم CGS و مضارب آن را از میکرو تا مگا معرفی کرد.

✓ در سال ۱۸۸۰ میلادی انجمن توسعه علوم انگلیس و مجمع بین‌المللی الکتریک - که بعداً به IEC تبدیل شد - مجموعه‌ای از یکاهای علمی هماهنگ را پذیرفتند. این یکاها عبارت بودند از: اهم برای مقاومت الکتریکی، ولت برای نیروی محرکه الکتریکی و آمپر برای جریان الکتریکی.

✓ پس از برقراری کنوانسیون متر در ۲۰ می ۱۸۷۵، کمیته بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها (CIPM) اقدام به تعریف نمونه‌های کیلوگرم و متر به‌عنوان یکاهای اصلی جرم و طول نمود و در سال ۱۸۸۹ نمونه‌های بین‌المللی متر، کیلوگرم و ثانیه نجومی به‌عنوان سه یکای اصلی مکانیکی به تصویب رسید.

✓ گیورگی^۱ در سال ۱۹۰۱ میلادی نشان داد که امکان ترکیب یکاهای مکانیکی سیستم ثانیه، متر و کیلوگرم با یکاهای علمی الکتریک وجود دارد و با افزودن شدت جریان می‌توان تعداد یکاهای اصلی را به چهار رساند.

✓ پس از بازنگری کنوانسیون متر در ششمین مجمع بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها در سال ۱۹۲۱ میلادی حوزه فعالیت و مسئولیت‌های "BIPM" به سایر موضوعات فیزیک افزایش یافت و پس از ایجاد کمیته‌های مشورتی در هفتمین مجمع در سال ۱۹۲۷ پیشنهاد گیورگی توسط IEC، IUPAC و سایر سازمان‌های بین‌المللی مورد بحث و تبادل نظر قرار گرفت؛ تا این که در سال ۱۹۳۶ پیشنهاد افزایش تعداد یکاهای اصلی به چهار ارایه و CIPM در سال ۱۹۴۶ آن را تصویب کرد.

✓ در دهمین مجمع "CGPM" در سال ۱۹۵۴، آمپر، کلون و کاندلا به‌عنوان یکاهای شدت جریان، دمای ترمودینامیکی و شدت روشنایی مورد پذیرش قرار گرفت.

باز تعریف سیستم SI

پدیدآوری عملی یکاهای اصلی، باید در هر جا و هر زمان و با بهترین درستی و با در نظر گرفتن مسائل اقتصادی امکان‌پذیر باشد. در تعاریف جدید ترجیح داده می‌شود که از خصوصیات ثابت طبیعت که تغییر نمی‌کنند، استفاده شود. برای این منظور معمولاً از خواص فیزیکی اتم‌ها استفاده می‌شود. توسعه این امر سبب ایجاد شاخه‌ای در اندازه‌شناسی به نام اندازه‌شناسی کوانتومی^۲ شده است. در قرن هجدهم متر و زمان بر حسب ابعاد و دوره تناوب گردش زمین تعریف شد. اما "ماکسول" در سال ۱۸۷۰ میلادی متوجه این واقعیت شد که این ویژگی‌های کره زمین ثابت نیستند.

در حال حاضر از هفت کمیت اصلی سیستم SI تنها ثانیه و متر است که مستقیماً به چنین خصوصیات ثابت مربوط می‌شود. ثانیه بر حسب نوسانات اتم سزیوم ۱۳۳ متر بر حسب سرعت نور در خلا تعریف می‌شود. البته جای ذکر است که دمای ترمودینامیکی هم بر حسب حالت طبیعی و ثابت نقطه "سه گانه آب" تعریف می‌شود؛ و لیکن دمای این نقطه به ناخالصی‌های آب و ترکیب ایزوتوپ‌های مختلف آب کاملاً وابسته است. تعریف سایر کمیت‌های اصلی اساساً استحکام لازم ندارند. کیلوگرم همچنان براساس تعریف ارایه شده در اولین مجمع عمومی اوزان و مقیاس‌ها در سال ۱۸۸۹ میلادی می‌باشد. این نمونه بین‌المللی نسبت به زمان رانش دارد و هیچ کس نمی‌داند

1- Giorgi

2- Quantum Metrology

مقدار آن دقیقاً چقدر است؟ ضعف تعریف آمپر، متر و کاندلا بیشتر به وابستگی تعریف آنها به کیلوگرم مربوط می‌شود.

در نتیجه بازتعریف کیلوگرم در کانون بهبود سیستم SI قرار گرفت. در حال حاضر نمونه بین‌المللی کیلوگرم، استوانه‌ای به ارتفاع و قطر تقریباً ۳۹ میلی‌متر است که از آلیاژ ۹۰ درصد پلاتین و ۱۰ درصد ایریدیم ساخته شده است و در دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها (BIPM) نگهداری می‌شود. بحث و تبادل نظر درباره امکان بازتعریف کیلوگرم برحسب ثابت‌های بنیادی طبیعت در اواخر قرن بیستم آغاز شد تا این که در بند هفتم مصوبات بیست و یکمین مجمع CGPM در سال ۱۹۹۹ میلادی، توصیه شد که آزمایشگاه‌های ملی اندازه‌شناسی به تلاش‌های خود در باز تعریف یکای جرم برحسب ثابت‌های بنیادی ادامه دهند. تبادل نظر درباره‌ی تعریف مجدد کیلوگرم در نود و سومین جلسه کمیته بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها (CIPM) در اکتبر ۲۰۰۴ میلادی ادامه یافت و در سال ۲۰۰۵ پیشنهاد اولیه تعریف کیلوگرم برحسب ثابت پلانک یا عدد آووگادرو ارایه گردید. علاوه بر کیلوگرم، تعاریف جدیدی برای آمپر، کلوین و مول نیز تهیه شده است که در آن از ثابت‌های پلانک، بار الکترون، ثابت بولتزمن و عدد آووگادرو استفاده شده است. در صورت تحقق این تعاریف از هفت کمیت اصلی شش کمیت به ثابت‌های بنیادی پیوند می‌خورد. در باز تعریف این کمیت‌ها فرض اساسی این است که ساختار کلی سیستم SI تغییر نکند و دلیل این فرض آن است که جامعه علمی و اندازه‌شناسان این سیستم را کاملاً پذیرفته‌اند و از دید آن‌ها هرگونه تغییر در آن، مشکلات زیادی را به بار می‌آورد. به همین سبب حتی از تغییر اسامی یا نمادهای مورد استفاده نیز جلوگیری کردند. به عنوان مثال به دلایل تاریخی یکای جرم، دارای پیشوند کیلو است؛ این به آن معناست که از پیشوندهای سیستم SI نمی‌توان برای گرم استفاده نمود. فرض اساسی دیگر آن است که در تعریف جدید کمیت‌های اصلی سیستم SI دسترسی به عدم قطعیت‌های کمتر، ضرورتی ندارد. آخرین فرض اساسی آن است که یکا و ثابت بنیادی مورد استفاده در بازتعریف باید به گونه‌ای انتخاب شود که در علوم تجربی و اندازه‌شناسی بیشترین کاربرد و سودمندی را داشته باشد.

کیلوگرم تنها یکای استاندارد است که به شکل یک توده‌ی فلزی است. کیلوگرم استاندارد در حال تغییر است. احتمالاً وزن آن زیاد می‌شود. ضمناً کالیبراسیون وزنه‌ها توسط آن دشوار است. همه‌ی این مشکلات به معنی آن است که باید راه دیگری برای تعریف کیلوگرم پیدا کرد، راهی که به یک جسم عملاً غیر قابل انتقال وابسته نباشد.

دو نوع تعریف جایگزین برای کیلوگرم استاندارد احتمال دارد: یکی براساس شمارش اتم‌ها و دیگری براساس اندازه‌گیری نیروی الکترو مغناطیسی. اساس کار در روش شمارش تعداد اتم‌ها، این

است که تعداد اتم‌های یک نمونه را به دقت بشماریم. این کار دراصل ساده است؛ زیرا کافی است اندازه‌ی نمونه را بدانیم و هندسه شبکه بلور نمونه هم مشخص باشد. دراین صورت با دانستن فاصله شبکه می‌توانیم تعداد اتم‌ها را به دست آوریم. جرم نمونه برابر است با تعداد اتم‌ها ضربدر جرم هر اتم؛ اما این کار درعمل دو مشکل اساسی دارد. نمونه‌ای مثل یک کره سیلیسیومی را در نظر بگیرید. اولاً باید مطمئن بود که ساختار بلوری آن بی نقص است یا اگر نقصی دارد، تعداد نقایص باید مشخص باشد. ثانیاً، ایزوتوپ‌های گوناگون سیلیسیوم در بلور حضور دارند و البته جرم این ایزوتوپ‌ها یکسان نیست. پس کسر ایزوتوپی نمونه باید با درستی کافی مشخص باشد. روشی که در عمل به کار رفته چنین است که ابتدا میله‌های فرا خالص سیلیسیوم ساخته می‌شوند، از میله‌ها کره‌هایی به قطر ۹۳ میلی‌متر تولید و سپس در مراکز اندازه‌شناسی جرم، حجم و فاصله بین کره‌ها و نسبت ایزوتوپی اتم‌ها تعیین می‌شود. در همه‌ی این بخش‌ها، داشتن دانش عمیق و دقیق از اندازه‌گیری مورد نیاز است. مشاهدات نشان می‌دهد در کره‌های سیلیسیومی حفره‌هایی وجود دارد، یعنی شبکه‌ی بلوری کامل نیست؛ این حفره‌ها ممکن است، منشا بروز خطا باشند. اگر بتوان چگالی حفره‌ها را تعیین کرد، می‌توان درستی اندازه‌گیری تعداد ذرات را ارتقا داد.

در روش نیرو، از یک ترازوی وات استفاده می‌شود. اساس کار تعیین وزن از طریق مقایسه‌ی آن با یک نیروی الکترومغناطیسی است. وسیله‌ای که برای این منظور به کار می‌رود شبیه یک ترازوی دو کفه‌ای است. دو کفه این ترازو از کابلی آویزان است و روی قرقره‌ای قرار دارد. زیر هر کفه یک سیم پیچ ثابت است که می‌تواند دور یک آهن ربای استوانه‌ای قرار گیرد. اگر جریانی از سیم پیچ بگذرد بر آن نیرویی وارد می‌شود که سیم پیچ را به بالا یا پائین می‌راند (آهن ربا روی زمین ثابت است). روش توزین این است که وزنه (مثلاً یک نمونه از جنس طلای کیلوگرم استاندارد) را در یک کفه می‌گذارند و آن قدر جریان‌ها را تغییر می‌دهند تا تعادل برقرار شود. به این ترتیب می‌توان وزن نمونه را برحسب یکاهای استاندارد ولتاژ و جریان به دست آورد. توجه کنید که با این روش وزن نمونه به دست می‌آید نه جرم آن. برای به دست آوردن جرم باید میدان گرانشی محل را هم با دقت و درستی کافی دانست.

اگر Q یک ثابت اصلی باشد به طوری که بزرگی آن برای ما قابل انتخاب نباشد آن را ثابت طبیعی می‌نامیم. مقدار Q با ضرب بزرگی آن $\{Q\}$ در یکای آن $[Q]$ بیان می‌شود.

$$Q = \{Q\} [Q]$$

به عنوان مثال سرعت نور به صورت زیر بیان می‌شود:

$$C = \{C\} [C] = 299792458 \text{ m/s}$$

در این بیان اگر یکای $[Q]$ را مستقل تعریف کنیم، باید بزرگی $\{Q\}$ را بطور تجربی تعیین کنیم اما اگر بزرگی $\{Q\}$ مناسب باشد در این صورت باید یکای $[Q]$ تعریف شود. این روش در سال ۱۹۸۳ برای تعریف متر بکار رفت و تصمیم گرفته شد بزرگی $\{C\}$ دقیقاً ۲۹۹۷۹۲۴۵۸ و یکای سرعت $[C] = \text{m/s}$ باشد. از آنجایی که ثانیه قبلاً تعریف شده بود، متر تعریف شد. عدد $\{C\}$ در تعریف جدید انتخاب شد بدون آن که اندازه m/s تغییر کند و بدین ترتیب پیوستگی بین یکای جدید و قدیم حفظ شد.

تعاریف یکاها در SI جدید

سیستم SI جدید مبتنی بر ثابت‌های طبیعی زیر است:

- فرکانس حالت پایه ساختار فوق ظریف اتم سزیم ^{133}Cs ، $\Delta\nu \times (133_{\text{cs}})$ دقیقاً برابر است با:

$$9192631770 \text{ Hz}$$

$$299792458 \text{ m/s}$$

- سرعت نور در خلاء دقیقاً برابر است با:

$$6/626070040 \times 10^{-34} \text{ J.s}$$

- ثابت پلانک دقیقاً برابر است با:

$$1/602176620 \times 10^{-19} \text{ C}$$

- بار بنیادی e دقیقاً برابر است با:

$$1/38064852 \times 10^{-23} \text{ J/k}$$

- ثابت بولتزمن K دقیقاً برابر است با:

$$6/022140857 \times 10^{23} \text{ mol}^{-1}$$

- ثابت آووگادرو N_A دقیقاً برابر است با:

با استفاده از این ثابت‌های طبیعی تعریف یکاهای اصلی در پیش نویس سیستم جدید SI - که در اجلاس سال ۲۰۱۸ به رای گذاشته خواهد شد - به صورت زیر پیشنهاد شده است.

۱- ثانیه - با نماد s - یکای زمان در SI است و با تثبیت بزرگی فرکانس سزیم $\Delta\nu (133_{\text{cs}})$ برابر است با 9192631770 Hz در حالت پایه فوق ظریف اتم سزیم تعریف می‌شود. این تعریف سبب می‌شود که رابطه دقیق $\Delta\nu (133_{\text{cs}}) = 9192631770 \text{ Hz}$ برقرار باشد. معکوس این رابطه تعریف ثانیه را بر حسب ثابت $\Delta\nu (133_{\text{cs}})$ به دست می‌دهد.

$$s = \frac{9192631770}{\Delta\nu (133_{\text{cs}})} \quad \text{یا} \quad \text{Hz} = \frac{\Delta\nu (133_{\text{cs}})}{9192631770}$$

با این تعریف ثانیه برابر است با مدت زمان ۹۱۹۲۶۳۱۷۷۰ تابش مطابق با انتقال بین دو تراز فوق ظریف در حالت پایه اتم سزیم.

۲- متر- با نماد m- یکای طول در SI است و با تثبیت بزرگی سرعت نور در خلاء برابر با 299792458 m/s تعریف می‌شود به طوری که ثانیه برحسب فرکانس $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ تعریف می‌شود. این تعریف سبب می‌شود که رابطه دقیق $C = 299792458 \text{ m/s}$ برقرار باشد. معکوس این رابطه بیان دقیقی از یکای متر بر حسب ثابت‌های c و $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ به دست می‌دهد.

$$m = \left(\frac{C}{299792458} \right) s = 30.663318 \frac{C}{\Delta\nu(133_{\text{cs}})}$$

۳- کیلوگرم- با نماد kg- یکای جرم در SI است و با تثبیت بزرگی ثابت پلانک برابر با: $6.62607004 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ تعریف می‌شود. J.S برابر است با $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-1}$. متر و ثانیه برحسب c و $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ تعریف می‌شود.

این تعریف سبب می‌شود که رابطه دقیق $h = 6.62607004 \times 10^{-34} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-1}$ برقرار باشد. معکوس این رابطه بیان دقیقی از کیلوگرم بر حسب سه ثابت h، $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ و c به دست می‌دهد.

$$\text{kg} = \left(\frac{h}{6.62607004 \times 10^{-34}} \right) \text{m}^2 \text{s} = 1.475521 \dots \times 10^4 \frac{h \Delta\nu(133_{\text{cs}})}{c^2}$$

۴- آمپر - با نماد A- یکای جریان الکتریکی در SI است و با تثبیت بزرگی بار بنیادی e برابر با $1.602176620 \times 10^{-19} \text{ C}$ تعریف می‌شود. C برابر است با A s. ثانیه بر حسب $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ تعریف می‌شود. این تعریف سبب می‌شود که رابطه دقیق $e = 1.602176620 \times 10^{-19} \text{ A s}$ برقرار باشد. معکوس این رابطه بیان کاملی برای یکای آمپر بر حسب ثابت‌های e و $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ به دست می‌دهد.

$$A = \left(\frac{e}{1.602176620 \times 10^{-19}} \right) \text{s}^{-1} = 6.789687 \dots \times 10^8 \Delta\nu(133_{\text{cs}}) e$$

با این تعریف آمپر برابر است با جریان الکتریکی مطابق با شارش $\left(\frac{1}{1.602176620 \times 10^{-19}} \right)$ بار بنیادی در ثانیه.

۵- کلوین - با نماد K- یکای دمای ترمودینامیکی در سیستم SI است و با تثبیت بزرگی ثابت بولتزمن k برابر با $1.38065852 \times 10^{-23} \text{ J/k}$ که معادل $\text{kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ است تعریف می‌شود. کیلوگرم، متر و ثانیه برحسب h، c، $\Delta\nu(133_{\text{cs}})$ تعریف می‌شوند. این تعریف سبب می‌شود که

رابطه کامل $e = 1/38.064852 \times 10^{-23} \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-2} \text{ K}^{-1}$ برقرار باشد. معکوس این رابطه تعریف کاملی از کلونین برحسب ثابت‌های h , k , $\Delta\nu(133_{\text{CS}})$ به دست می‌دهد.

فصل دوم

اندازه‌گیری، قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی و عدم قطعیت اندازه‌گیری

این یک حقیقت غیرقابل انکار است که
چنانچه امکان شناسایی واقعیت نباشد
باید به دنبال بیشترین احتمال بگردیم.
"رنه دکارت"
پیدا کردن دو فیلسوف هم رای آسان‌تر
از پیدا کردن دوساعت همسان است.
"Lucius Annaeus Sencus"

فرآیند اندازه‌گیری

امروزه اندازه‌گیری را به صورت فرآیند در نظر می‌گیرند بررسی‌ها نشان می‌دهد که در هر
فرآیندی چند عامل کوچک و ناچیز می‌تواند به یک تغییر تصادفی در خروجی فرآیند منجر شود.
این عوامل از کاربر، روش اجرایی، شرایط محیطی و مواد یا تجهیزات مورد استفاده ناشی می‌شود.
برقراری تعادل اقتصادی بین هزینه‌های شناسایی و حذف منابع دخیل در تغییرات و کاهش اثرات
آنها در نتایج اندازه‌گیری اهمیت بسیاری دارد. تولید کنندگان و آزمایشگاه‌های آزمون و
کالیبراسیون از ابزارهای آماری برای پایش متغیرهای تصادفی استفاده می‌کنند. این ابزارها اجازه
می‌دهند که از تحت کنترل بودن فرآیندها مطمئن شویم.

یک فرآیند اندازه‌گیری وقتی تحت کنترل آماری است که پراکندگی داده‌های حاصل از تکرار
اندازه‌گیری یک اندازه ده مشخص در فواصل زمانی معین تغییر نکند و رانش‌های ناگهانی در داده‌ها
وجود نداشته باشد (تعریف Belanger) یا یک فرآیند اندازه‌گیری در صورتی تحت کنترل آماری

است که تغییرات مورد مشاهده فقط علل تصادفی داشته باشند و بالعکس. اگر فرآیندی که تغییراتی از خود نشان می‌دهد علل قابل تشخیصی نداشته باشد تحت کنترل آماری نمی‌باشد (تعریف Juran).

استفاده از دستگاه‌های آزمون و اندازه‌گیری در خارج از محدوده‌ی ویژگی‌ها و مشخصات آن‌ها نتایج جبران ناپذیری را می‌تواند به بار آورد. چنین کاربردهایی به رشد ریسک تصمیم‌های نادرست از قبیل قبولی یا مردودی فرآورده‌های تحت آزمون منجر می‌گردد. هدف غائی در انتخاب درست دستگاه‌های آزمون و اندازه‌گیری کمینه بودن ریسک در تصمیم‌های نادرستی است که از نتایج اندازه‌گیری ناشی می‌شود. هرچه عدم قطعیت مقادیر اندازه‌گیری شده بیشتر باشد، ریسک اتخاذ تصمیم‌های نادرست هم بیشتر خواهد بود. هزینه تصمیم‌های نادرست معمولاً اتلاف زمان، سرمایه و اعتبار سازمان است. به عنوان مثال در یک کارخانه بلبرینگ سازی، ارزیابی انطباق ساچمه‌های تولید شده با اندازه‌گیری برخی از مشخصات آن صورت می‌پذیرد. یکی از مشخصات لازم کرویت یا گردی بودن آنها است که در گستره‌ای مانند $\pm 10 \mu m$ قرار دارد. برای اندازه‌گیری این مشخصه از دستگاه مخصوصی استفاده می‌شود. سئوالی که مطرح می‌گردد این است که چه عدم قطعیتی در اندازه‌گیری لازم است؟ و به دنبال آن این سئوال مطرح می‌شود که چه ریسکی را فرآیند می‌تواند تحمل کند؟ برای این که ریسک کمتری داشته باشیم باید دستگاهی انتخاب شود که عدم قطعیت اندازه‌گیری آن کم باشد مثلاً $\pm 1 \mu m$ ؛ یعنی، با نسبت عدم قطعیت ده به یک. اما متأسفانه چنین دستگاهی بسیار گران است. با نصف قیمت، دستگاه با عدم قطعیت اندازه‌گیری $2 \mu m$ (نسبت پنج به یک) می‌توان تهیه نمود. آیا تهیه این دستگاه منطقی است؟ آیا ریسک بالای استفاده از دستگاه اندازه‌گیری ارزان‌تر، هزینه تولید ساچمه‌های نامرغوب را که از عدم قطعیت اندازه‌گیری بیشتر ناشی می‌شود افزایش نمی‌دهد؟ آیا با تولید ساچمه‌های معیوب، هزینه گارانتی و شکایات مشتری با صرفه جویی ناشی از خرید دستگاه اندازه‌گیری ارزان تر برابری می‌کند؟ بنابراین در هر سازمانی پیش از هر اقدامی، لازم است بررسی دقیق نیازهای اندازه‌شناسی سازمان انجام شود.

نیازهای سازمانی به مدیریت اندازه‌شناسی

برای تعریف نیازهای سازمانی به مدیریت اندازه‌شناسی لازم است به سئوالات زیر پاسخ دهیم.

● آیا این نیازها به حدی هستند که به ایجاد یک سیستم تمام عیار اندازه‌شناسی در سازمان

بپردازیم؟

● آیا به کارکنان دائمی و مجاز در این حوزه نیاز داریم؟

● از چه امکاناتی در این حوزه برخورداریم؟

الزامات لازم برای تحقق اندازه‌گیری‌ها

برای تحقق درست اندازه‌گیری‌ها به امکانات مناسبی نیاز داریم. این امکانات پس از بررسی اهداف و قابلیت و توانمندی دستگاه‌های اندازه‌گیری مشخص می‌شوند. به منظور تعریف نیازهای خود لازم است به سئوالات زیر پاسخ دهیم.

الف- نیازهای صنعتی ما چیست؟

- چه کمیتی را با چه عدم قطعیتی باید اندازه‌گیری کنیم؟
- ب- آیا می‌توانیم پاسخگوی نیازهای خود باشیم؟
- روش‌های اندازه‌گیری ممکن کدام هستند؟
- از چه اصول اندازه‌گیری باید استفاده کنیم؟
- پ- از چه دستگاه‌های اندازه‌گیری می‌توانیم استفاده کنیم؟
- کدام دستگاه اندازه‌گیری را باید انتخاب کنیم؟
- آیا دستگاه اندازه‌گیری مورد نظر درستی لازم را دارد؟
- ت- از دستگاه اندازه‌گیری چگونه استفاده کنیم؟
- چه وسایل کمکی برای اجرای اندازه‌گیری لازم است؟
- برای استفاده از آن‌ها چه صلاحیت‌های فنی لازم است؟

سازمان‌هایی که اجرای اندازه‌گیری‌ها و نتایج حاصل در آن‌ها اهمیت دارند، به فعالیت‌های زیر باید توجه کنند:

- کنترل فعالیت‌های ساخت و تولید؛
- بررسی و تصدیق انطباق محصولات با ویژگی‌ها؛
- تضمین سلامت شهروندان و محصولات؛
- حفاظت محیط زیست.

اصولاً تولیدکنندگان و بنگاه‌های اقتصادی در ایجاد یک حوزه فعالیت اندازه‌شناختی با چالش‌های زیر مواجه هستند:

- دستیابی به یک درک صحیح از ضرورت حضور اندازه‌شناسی در فعالیت‌های اقتصادی.
- دستیابی به یک درک صحیح از مفاهیم پایه اندازه‌شناسی مانند قابلیت ردیابی، کالیبراسیون، استاندارد مرجع، عدم قطعیت اندازه‌گیری و ...
- درک الزامات اندازه‌شناختی استانداردهای سیستم‌های مدیریت کیفیت؛ مانند ISO ۹۰۰۰ و

سیستم مدیریت اندازه‌گیری و حوزه فعالیت اندازه‌شناختی

استاندارد ISO ۱۰۰۱۲ به معرفی مفهوم سیستم مدیریت اندازه‌گیری و تعریف آن به صورت مجموعه عناصر لازم دارای ارتباط یا تعامل درونی جهت دسترسی به تایید اندازه‌شناختی و کنترل مستمر فرآیندهای اندازه‌گیری می‌پردازد. بنابراین لازم است که:

● تایید اندازه‌شناختی تجهیزات اندازه‌گیری صورت پذیرد؛

● کنترل فرآیندهای اندازه‌گیری سازماندهی گردد.

اولین موضوع مورد اشاره بیانگر فعالیت‌های متداول حوزه فعالیت اندازه‌شناختی است و کنترل مستمر فرآیندهای اندازه‌گیری به فعالیت‌های مدیریت تجهیزات اندازه‌گیری اضافه شده است. این گسترش و تعمیم سبب تعریف جدیدی از حوزه فعالیت اندازه‌شناختی شده که در بند ۳-۶ استاندارد ۱۰۰۱۲ به آن اشاره شده است "حوزه فعالیت با مسئولیت اداری و فنی برای تعریف و اجرای سیستم مدیریت اندازه‌گیری"

حوزه فعالیت اندازه‌شناختی مسئول تایید اندازه‌شناختی تجهیزات اندازه‌گیری است. این فعالیت در بند ۳-۱۵ استاندارد به صورت زیر تعریف شده است.

"مجموعه عملیات لازم برای حصول اطمینان از این که تجهیزات اندازه‌گیری با الزامات مربوط به کاربرد مورد نظر انطباق دارد."

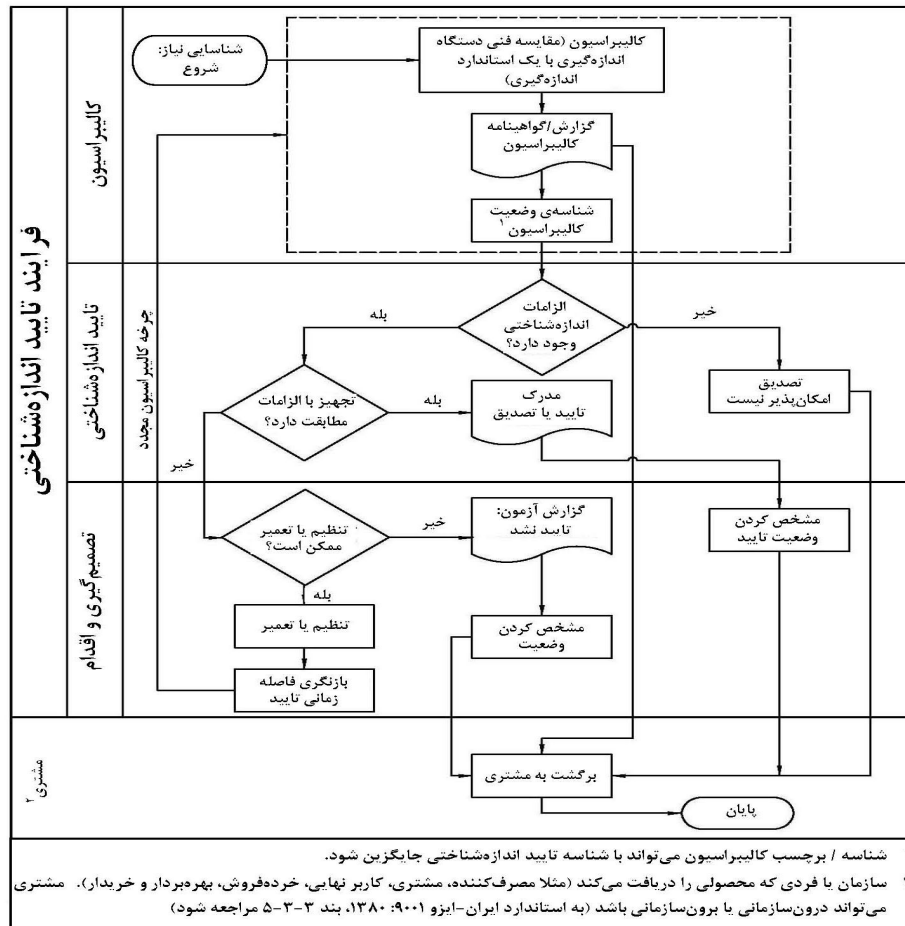
یادآوری ۱- تایید اندازه‌شناختی به طور کلی شامل کالیبراسیون، تصدیق، هرگونه تنظیم یا تعمیر لازم و کالیبراسیون مجدد پس از آن، مقایسه با الزامات اندازه‌شناختی برای کاربرد مورد نظر تجهیزات و همچنین هرگونه مهر و موم کردن و برچسب‌زنی لازم است.

یادآوری ۲- تایید اندازه‌شناختی قابل دستیابی نیست مگر تا زمانی که مناسب بودن تجهیزات اندازه‌گیری برای کاربرد مورد نظر به اثبات رسیده و مستند شده باشد.

یادآوری ۳- الزامات کاربرد مورد نظر ملاحظات نظیر گستره‌ی اندازه‌گیری، تفکیک پذیری و بیشینه خطاهای مجاز را دربرمی‌گیرد.

فرآیندهای اندازه‌گیری

یکی از اصول مدیریت در استانداردهای مدیریتی مانند ISO ۹۰۰۰، توجه به رویکرد فرآیندی است. استاندارد ۱۰۰۱۲ توصیه می‌کند اندازه‌گیری‌ها به صورت فرآیندهای مشخص در نظر گرفته شوند و هدف آن‌ها پشتیبانی از کیفیت فرآورده‌های تولید شده توسط سازمان است. مدل سیستم مدیریت اندازه‌گیری زیر توسط استاندارد فوق معرفی شده است.



مدل استاندارد ۱۰۰۱۲

برای درک و توسعه فرآیندهای اندازه‌گیری فعالیت‌های زیر باید صورت پذیرند.

- تحلیل نیازها: تعریف روشن و درستی از خواسته‌های مشتریان در ارائه خدمات یا محصول، موضوعی بسیار مهم و حیاتی است. در تجارت ویژگی‌های مربوط به محصول یا خدمات را بخش‌های تحقیق و توسعه تعریف می‌کنند. این ویژگی‌ها با تبدیل به مشخصات و رواداری‌ها، کمی می‌شوند تا در مراحل ساخت و تولید به کار روند. براساس بند ۴-۷-۱ استاندارد ۱۷۰۲۵:
- آزمایشگاه باید همواره آمادگی داشته باشد که با مشتریان یا نمایندگان آن‌ها در زمینه‌ی روشن کردن درخواست مشتری و یا پایش عملکرد آزمایشگاه در رابطه با کار انجام گرفته، همکاری کند؛

- تبدیل ویژگی‌ها به اندازه ده و یا کمیت‌های قابل اندازه‌گیری:
 - این مرحله علاوه بر کمی‌کردن ویژگی‌ها به افزایش هم‌افزایی بین مفاهیم کیفیت و اندازه‌شناسی منجر می‌شود. در این مرحله بررسی الزامات اندازه‌شناختی فنی مانند تعریف آن‌ها، انطباق با وضعیت فنی و استراتژی‌های سازمان و بررسی‌های اقتصادی باید اجرا شود.
 - سازماندهی توسعه فرآیند اندازه‌گیری به صورت پروژه.
 - پیشنهاد می‌شود که توسعه فرآیندهای اندازه‌گیری به صورت پروژه‌ای و با ویژگی‌های زیر سازماندهی گردد.
 - الف- مشخصه‌ی فرآیندها و اهدافی که باید به آنها برسیم به صورت زیر تعریف شوند:
 - از نظر فنی: تکرارپذیری و تجدیدپذیری اندازه‌گیری‌ها و ...
 - از نظر اقتصادی: هزینه‌های استقرار، تغییر ساختار، تعمیرات و ...
 - تعریف روشن از داده‌های ورودی (دروندها) مانند کمیت‌های مورد اندازه‌گیری، عدم قطعیت اندازه‌گیری مورد نظر، سرعت فرآیندها، ایمنی و ...
 - ب- طراحی مراحل مختلف پروژه و تخصیص منابع انسانی و مالی هر یک از مراحل؛
 - پ- توصیف واضحی از آن چه که توسط این پروژه لازم است ارایه شود؛
 - ت- ارایه گزارش عملکرد فرآیند اندازه‌گیری (تکرار پذیری، تجدیدپذیری، عدم قطعیت اندازه‌گیری و ...) و تصمیم‌گیری درباره این که از پروژه در ارایه خدمات استفاده شود یا خیر؛
 - ث- برنامه توسعه پروژه و واگذاری وظایف و منابع.
- در بهبود فرآیندهای اندازه‌گیری، افزایش دانش فنی کارکنان از عوامل مهمی است که سازمان باید به آن توجه کند. تنها فاکتور بهبود مستمر فرآیندهای اندازه‌گیری، افزایش دانش فنی است و بدون آن به هیچ وجه بهبودی در مقادیر عدم قطعیت اندازه‌گیری حاصل نمی‌شود.

مدیریت تجهیزات اندازه‌گیری

یکی از وظایف حوزه‌ی فعالیت اندازه‌شناختی، حصول اطمینان از انتخاب درست دستگاه‌های اندازه‌گیری است که در سازمان بر کیفیت محصولات و یا خدمات موثرند. با این روش می‌توان با حداقل ریسک، تضمین نمود که تجهیزات اندازه‌گیری در حدود رواداری مجاز خود قرار دارند. بدین منظور، سازمان باید به پیاده‌سازی سیستم مدیریت تجهیزات اندازه‌گیری بپردازد. این سیستم، برقراری قابلیت ردیابی نتایج اندازه‌گیری و اجرای تصدیق تجهیزات اندازه‌گیری را امکان پذیر خواهد کرد. برای ارایه‌ی خدمات درون سازمانی لازم است که تامین کننده حوزه فعالیت اندازه‌شناختی قادر به کالیبراسیون و تصدیق تجهیزات مورد نیاز سازمان باشد. ویژگی‌های اندازه

شناختی تجهیزات (مانند گستره اندازه‌گیری، تفکیک پذیری، تکرار پذیری و ...) باید با نیازهای سازمان مطابقت داشته باشد که این تطابق را می‌توان به صورت عدم قطعیت اندازه‌گیری بیان نمود. بعضی از فعالیت‌های حوزه‌ی فعالیت اندازه‌شناختی (کالیبراسیون، تعمیرات و نگهداری و ...) را می‌توان به پیمانکاران داخلی یا خارجی واگذار کرد. با این وجود، در تمام مراحل، یک نفر مسئول قبولی یا مردودی تجهیزات اندازه‌گیری را در ارایه خدمات به عهده دارد و باید انطباق تجهیزات اندازه‌گیری را با اهداف مورد نظر تایید نماید.

حوزه‌ی فعالیت اندازه‌شناختی، برای اطمینان از برقراری قابلیت ردیابی نتایج استانداردهای مرجع به سیستم SI باید پیمانکاران فرعی را دسته بندی کند. به عهده حوزه فعالیت اندازه‌شناختی است که:

- از انطباق فعالیت‌های پیمانکاران با درخواست‌های سازمان از طریق برگزاری ممیزی‌ها یا سایر روش‌های ارزیابی مطمئن شود؛
- آزمایشگاه‌های کالیبراسیونی انتخاب شوند که توسط یک سازمان ملی یا نهادی تایید صلاحیت شده‌اند؛

● حوزه‌ی فعالیت اندازه‌شناختی باید در هر سطحی از زنجیره‌ی قابلیت ردیابی قادر باشد که برقراری قابلیت ردیابی به سیستم SI را از طریق زنجیره‌ی پیوسته مقایسه‌ها نشان دهد. وجود عدم قطعیت اندازه‌گیری برای هر مرحله از مقایسه‌ها، الزامی است.

مدیریت تجهیزات اندازه‌گیری به دنبال استقرار و نگهداری از تجهیزاتی است که با الزامات سازمانی مطابقت داشته باشد و در این راستا به موارد زیر باید توجه داشته باشد.

- تحلیل الزامات و انتخاب تجهیزات اندازه‌گیری؛
- قابلیت ردیابی نتایج اندازه‌گیری؛
- کالیبراسیون، تصدیق و نظارت؛
- تایید انطباق تجهیزات با الزامات.

در انتخاب تجهیزات اندازه‌گیری علاوه بر الزامات فنی باید به الزامات اقتصادی و تجاری سازمان نیز توجه نمود. بررسی الزامات فنی باتوجه به شرایط زیر تحقق می‌یابد:

۱- مهمترین موضوع، کسب اطمینان از عملکرد، کلاس درستی و تکرار پذیری تجهیزات اندازه‌گیری و انطباق با الزامات فناوری سازمان است؛

۲- تجهیزات اندازه‌گیری هنگام ارزیابی فرآورده در مقایسه با مشخصات آن، مورد استفاده قرار می‌گیرند. بنابراین تجهیزات باید قبل از استفاده کالیبره شده و در گواهی کالیبراسیون به تصحیحات دستگاه اندازه‌گیری، توجه شود. همچنین تجهیزاتی که برای تصدیق به کار می‌روند باید به گونه‌ای

باشند که حدود خطای مجاز و سایر ضوابط را پوشش دهند؛

۳- باید اطلاعات دستگاه‌های اندازه‌گیری هنگام استفاده، تعمیر و ... در دسترس باشد؛

۴- هنگامی که از تجهیزات اندازه‌گیری نو و یا در خارج از محدوده‌ی معمول آن استفاده می‌شود، داشتن اطلاعات از شرایطی که تحت آن باید از دستگاه استفاده نمود ممکن است مفید واقع گردد؛

۵- توصیه می‌شود تحلیلی از وضعیت گذشته و یک پیش بینی از وضعیت آینده تجهیزات به منظور کاهش ریسک ناشی از فرسودگی آنها موجود باشد.

برای تجهیزات اندازه‌گیری خاص و یا پیچیده توصیه می‌شود که پرونده‌ای با مشخصات زیر تهیه شود:

الف- ویژگی‌های مورد درخواست برای تجهیزات اندازه‌گیری؛

ب- الزامات مربوط به کالیبراسیون و تصدیق؛

پ- شرایط استفاده، شرایط محیطی و نگهداری تجهیزات اندازه‌گیری؛

ت- شرایط پذیرش تجهیزات اندازه‌گیری.

فصل سوم

نظریه اندازه‌گیری

اصل علم به شرح زیر است:
آزمایش، آزمون تمام علم است. آزمایش تنها داور واقعیت علمی است
سخنرانی ریچارد فاینمن در مراسم جایزه نوبل ۱۹۶۳

آن دسته از نتایج اندازه‌گیری که از درستی آن‌ها اطلاعاتی در دسترس نباشد، قابل اطمینان نبوده و ارزش چندانی ندارند. پرواضح است که درستی نتایج اندازه‌گیری کاملاً به خطاهای اندازه‌گیری بستگی دارد. پس از سال‌ها بحث و تبادل نظر، امروزه متخصصین پذیرفته‌اند که مقدار واقعی خطا همواره نامعلوم و غیرقابل شناسایی است. این نتیجه‌گیری با پارادوکسی همراه است. بدون علم به خطا، کسی نمی‌تواند براساس نتیجه اندازه‌گیری به تصمیم‌گیری مطمئنی دست بزند و از طرفی، خطا نامعلوم و غیر قابل شناسایی است. اندازه‌شناسان در حل این پارادوکس به ابزارهای آماری متوسل شده‌اند. در صورتی که امکان تعیین مقدار مطلق خطا وجود نداشته باشد، می‌توان "حدود خطا" را با روش‌های آماری "استنتاج" کرد. منظور از حدود خطا، حداکثر خطای مورد انتظار است. واژه‌ی دیگری که در بحث حدود خطا استفاده می‌شود "استنتاج" است. وقتی استنتاجی صورت می‌پذیرد از صحت کامل آن اطمینان نداریم. بنابراین در استنتاج حدود خطا، همواره ریسک نادرست بودن آن وجود دارد. آگاهی از حدود خطا با ریسک کم، بهتر از نداشتن هیچ آگاهی از مقدار خطا است.

در واقع حدود خطای نتایج اندازه‌گیری، همان عدم قطعیت اندازه‌گیری است. دربروز عدم قطعیت اندازه‌گیری می‌توان به دو عامل عمده اشاره نمود:
یکی از این عوامل، دقت فرآیند اندازه‌گیری است. این عامل با تکرار فرآیند اندازه‌گیری یک

اندازه ده ثابت، برآورد می‌شود. دقت، مشخصه‌ای از فرآیند اندازه‌گیری است که به نزدیکی چند نتیجه اندازه‌گیری به یک دیگر مربوط می‌شود. بنابراین، شاخص عددی دقت از تغییر پذیری تکرار نتایج اندازه‌گیری ناشی می‌شود. انحراف معیار یک شاخص عددی مناسبی در بیان دقت فرآیند اندازه‌گیری است.

عامل دوم که در عدم قطعیت اندازه‌گیری دخیل است، خطای سیستماتیک است که شاخص عددی آن از تحلیل مولفه‌های خطای سیستماتیک فرآیند اندازه‌گیری حاصل می‌شود. ارزیابی دستگاه اندازه‌گیری با فرآیند کالیبراسیون قابل تعیین است. خطای سیستماتیک معلوم همیشه قابل تصحیح است، اما مولفه‌ی دیگر، خطای سیستماتیک نامعلوم است که در عدم قطعیت دخالتی ندارد.

اهمیت گزارش عدم قطعیت اندازه‌گیری به عنوان بخشی از نتیجه‌ی اندازه‌گیری، مورد پذیرش جهانی قرار گرفته است. اندازه‌شناسان در تلاش هستند که روش‌های برآورد عدم قطعیت و گزارش آن را هماهنگ نمایند.

عدم قطعیت اندازه‌گیری بیانگر عدم دانش کامل ما از مقدار اندازه ده است. در ¹VIM سال ۱۹۸۴ عدم قطعیت بدین صورت تعریف شده است: یک برآورد از گستره مقادیری است که مقدار واقعی اندازه‌ده در آن قرار دارد. این تعریف در VIM سال ۱۹۹۳ به صورت زیر تغییر یافت: پارامتری مربوط به نتیجه‌ی اندازه‌گیری که پراکندگی مقادیری را مشخص می‌کند که می‌توان به طور منطقی به اندازه ده نسبت داد. در آخرین ویرایش VIM عدم قطعیت اندازه‌گیری به صورت زیر تعریف می‌شود:

پارامتری غیرمنفی که پراکندگی مقادیر کمیت را -که بر اساس اطلاعات مورد استفاده به اندازه ده نسبت داده شده است- مشخص می‌کند.

لازم است که درباره‌ی مفاهیم اندازه‌ده، خطا و عدم قطعیت دقت کافی داشته باشیم. اندازه‌ده کمیت مورد اندازه‌گیری است. اندازه‌ده نیاز به تعریف دارد، باید آن را ایجاد کرد. اگر ایجاد یا تحقق اندازه ده کاملاً با تعریف آن مطابقت نداشته نباشد در آن صورت نتیجه اندازه‌گیری باید تصحیح شود. علاوه بر آن نتیجه‌ی اندازه‌گیری به دلیل سایر اثرات سیستماتیک مشخص، نیز باید تصحیح شود. نتیجه نهایی (تصحیح شده) بهترین برآورد از مقدار واقعی است.

GUM² توصیه می‌کند که از واژه "مقدار واقعی" استفاده نشود. چون واژه‌ی "واقعی" باعث گمراهی می‌شود و با بررسی قابل دسترسی نیست. در حقیقت واژه "واقعی" سخن بیهوده‌ای است.

1- International Vocabulary of Basic and General Terms in Metrology

2- Guide to the expression of uncertainty in measurement

در اصل نتیجه‌ی نهایی بهترین برآورد از مقدار اندازه ده است. بنابراین:

"بهترین برآورد از مقدار اندازه‌ده همان مقدار واقعی در اندازه‌گیری است."

از آنجایی که نتیجه‌ی اندازه‌گیری یک برآورد است، همیشه خطا در آن حضور دارد و این به علت ناکاملی فرآیند اندازه‌گیری است که ناشی از دو عامل است: (الف) تغییرپذیری تصادفی فرآیند اندازه‌گیری، (ب) نامناسب بودن تصحیح اثرات سیستماتیک. احتمال این هم است که اثرات سیستماتیک ناشناخته نیز وجود داشته باشد که ناشی از کامل نبودن دانش ماست. بنابراین خطا ناشناخته است و غیر قابل شناسایی.

اگر چه هر نتیجه‌ی اندازه‌گیری برآورد شده، به صورت یک تک مقدار ساده در نظر گرفته می‌شود؛ اما بی‌نهایت مقدار در اطراف این نتیجه، پراکنده است که با درجات مختلف تحت عنوان مقدار اندازه‌ده پذیرفتنی است. این پراکندگی، عدم قطعیت نتیجه‌ی اندازه‌گیری است.

همان طوری که قبلاً هم اشاره شد گزارش عدم قطعیت اندازه‌گیری به همراه نتیجه اندازه‌گیری، مورد پذیرش جهانی قرار گرفته است. آثار این پذیرش را در استانداردهای ملی و بین‌المللی می‌توان مشاهده کرد، در اینجا مناسب است به تعدادی از آن‌ها اشاره کنیم:

در بند ۴-۱-۵ استاندارد ISO ۱۷۵۱۱ چنین آمده است:

مقداری که در هر سطح مشخصی به یک استاندارد اندازه‌گیری نسبت داده می‌شود باید به همراه عدم قطعیت اندازه‌گیری باشد. این مقدار (عدم قطعیت اندازه‌گیری) باید عدم قطعیت‌های مربوط به استانداردهای اندازه‌گیری و روش‌های اندازه‌گیری در سطوح بالاتر هرم کالیبراسیون را شامل شود.

در بند ۶ همین استاندارد چنین آمده است:

"عدم قطعیت اندازه‌گیری باید به صورت جملات مناسبی برای مقدار هر کمیت قابل اندازه‌گیری یک ماده مرجع بیان شود."

در بند ۵-۶-۲ استاندارد ISO ۱۵۱۸۹ چنین آمده است:

آزمایشگاه باید عدم قطعیت اندازه‌گیری‌های خود را هر جا که مربوط و ممکن باشد برآورد کند. مولفه‌های مهم عدم قطعیت اندازه‌گیری باید در نظر گرفته شوند.

مواردی که عدم قطعیت اندازه‌گیری محسوب نمی‌شوند عبارتند از:

الف- اشتباهات کاربران را نمی‌توان به عنوان عدم قطعیت اندازه‌گیری به حساب آورد بلکه باید از وقوع آن‌ها جلوگیری کرد؛

ب- رواداری، عدم قطعیت نیست. رواداری حدود قابل پذیرشی است که برای یک فرآیند یا فرآورده انتخاب می‌شود؛

پ- مشخصات یک محصول جزء عدم قطعیت نیست. یک مشخصه به شما می‌گوید که چه انتظاری می‌توانید از یک محصول داشته باشید؛

ت- درستی یا عدم درستی همانند عدم قطعیت اندازه‌گیری نیست. درستی یک ویژگی کیفی است در حالی که عدم قطعیت اندازه‌گیری یک بیان کمی است.

اصول مقدماتی نظریه‌ی اندازه‌گیری

برای توسعه هر علمی درکی واضح از فرضیه‌های مقدماتی و اصلی آن علم ضروری است. به همین سبب لازم است که اصول اولیه نظریه اندازه‌گیری را مورد بررسی قرار دهیم.

با استفاده از چند کمیت می‌توان خصوصیات شی یا آیتم مورد بررسی را توصیف کرد. در ابتدای اندازه‌گیری، آن شی یا آیتم به اندرکنش با دستگاه اندازه‌گیری می‌پردازد. وقتی برای اندازه‌گیری قطر میله‌ای، آن را بین فک‌های کولیس ورنیه‌دار قرار می‌دهیم و یا برای اندازه‌گیری ولتاژ یک مدار الکتریکی، ولت متری را در مدار قرار می‌دهیم. نشان‌دهنده‌ی دستگاه اندازه‌گیری مقدار برآورد شده‌ای را برای کمیت قابل اندازه‌گیری- که همان نتیجه‌ی اندازه‌گیری است- نشان می‌دهد. در مواردی از طریق محاسبات ریاضی داده‌های حاصل از چند دستگاه اندازه‌گیری، نتیجه‌ی اندازه‌گیری به دست می‌آید. مانند چگالی اجسام جامد، ضریب دمایی دماسنج‌های مقاومتی و

عیوب و نقایص دستگاه‌های اندازه‌گیری و سایر عوامل سبب بروز خطا در اندازه‌گیری می‌شود. باتوجه به این که اندازه‌گیری یک عمل تجربی بوده و مقدار واقعی کمیت قابل اندازه‌گیری یک مفهوم انتزاعی است، خطای اندازه‌گیری در اساس، غیر قابل اجتناب است. با توسعه دستگاه‌های اندازه‌گیری و روش‌های اندازه‌گیری، خطای اندازه‌گیری فقط می‌تواند کاهش یابد. برای هر اندازه‌گیری لازم است که کمیت‌های قابل اندازه‌گیری و یکای آن‌ها مشخص شود. هر اندازه‌گیری همیشه بر روی شی یا آیتم مشخصی انجام می‌شود؛ لذا باید خواص موضوع مورد اندازه‌گیری شناسایی شود. بنابراین شناسایی و تعریف مقدار واقعی کمیت قابل اندازه‌گیری امری ضروری است. متأسفانه این مرحله‌ی مهم از اندازه‌گیری به تنهایی قابل اجرا نیست. برای مشخص شدن این مشکل مثال اندازه‌گیری قطر یک دیسک را در نظر می‌گیریم. در ابتدا سعی می‌کنیم مسئله را فرموله کنیم. در حقیقت اندازه‌گیری قطر دیسک به این معناست که جسم مورد نظر دایره‌ای شکل است. توجه داریم که "دایره" و "قطر" مفاهیم ریاضی‌اند؛ یعنی، مفاهیم انتزاعی و مجرد. دایره نشانگر مدل جسم مورد نظر است. قطر دایره، پارامتری از مدل بوده و یک کمیت قابل اندازه‌گیری است که به صورت ریاضی تعریف می‌شود. با توجه به مطالب ذکر شده، می‌توان نشان داد که مقدار

واقعی قطر دیسک همان مقدار پارامتر مدل است.

با یک دستگاه اندازه‌گیری مناسب قطر دیسک را اندازه‌گیری می‌کنیم. قطر دیسک با توجه به تعریف آن نسبت به دوران ناوردا است. به همین دلیل اندازه‌گیری در جهات مختلف باید تکرار پذیر باشد. اگر اختلاف بین نتایج اندازه‌گیری کمتر از خطای اندازه‌گیری مجاز باشد در آن صورت می‌توان به نتیجه‌ی اندازه‌گیری دسترسی داشت. پس از به دست آمدن مقدار کمیت قابل اندازه‌گیری که برآوردی از مقدار واقعی اندازه‌ده است، اندازه‌گیری کامل می‌شود. اگر اختلاف اندازه‌گیری‌ها در جهات مختلف بزرگتر از خطای مجاز باشد باید گفت که با توجه به درستی مورد نظر در اندازه‌گیری قطر دیسک، دیسک یک قطر ندارد و بنابراین نمی‌توان عددی را به آن نسبت داد. پس مدل مورد نظر نمی‌تواند با خواص جسم واقعی مطابقت داشته باشد و اندازه‌گیری صحیح قابل اجرا نمی‌باشد. البته حتی اگر فرض کنیم که اندازه‌گیری قطر دیسک ممکن باشد، مقدار آن در جهات مختلف یکسان نخواهد بود. با صرف‌نظر از اختلافات کوچک می‌توان فرض کرد که مدل دایره با جسم مطابقت دارد و یک مقدار واقعی ثابت برای کمیت قابل اندازه‌گیری وجود دارد و برآوردی از آن را می‌توان به دست آورد.

بنابراین، فرض این که ساختار یک مدل نمی‌تواند آرمانی و کامل باشد گریز ناپذیر است و اختلاف بین پارامتر مدل و خاصیت واقعی جسم غیر قابل اجتناب می‌باشد. این اختلاف را "اختلاف اولیه" می‌نامیم.

همان گونه که اشاره شد خطای ناشی از اختلاف بین مدل و جسم باید از خطای اندازه‌گیری کل کوچکتر باشد. اگر این خطا از خطای اندازه‌گیری مجاز بیشتر شود در این صورت امکان اندازه‌گیری با درستی لازم وجود ندارد و این نشان دهنده‌ی نامناسب بودن مدل اندازه‌گیری است. گاهی تعریف مجدد مدل اندازه‌گیری می‌تواند به بهبود مسئله کمک کند. ممکن است مثال مذکور، ساده به نظر برسد، اما موارد مورد اشاره در آن در هر اندازه‌گیری‌ای وجود دارد، گرچه موارد همیشه به این سادگی و وضوح نمی‌باشند. به طور خلاصه اصول مقدماتی نظریه‌ی اندازه‌گیری از عناصر زیر تشکیل می‌شود:

الف- بعضی از پارامترهای مدل مربوط به جسم یا آیتم مورد نظر باید با خواص قابل اندازه‌گیری آن مطابقت داشته باشد؛

ب- مدل باید اجازه این فرض را بدهد که در طی زمان لازم برای انجام اندازه‌گیری، پارامتر مطابق با خاصیت قابل اندازه‌گیری جسم، ثابت بماند؛

پ- خطای ناشی از اختلاف بین مدل و جسم باید کمتر از خطای اندازه‌گیری مجاز باشد.

باتوجه به این سه عنصر، این اصل کلی را در اندازه‌شناسی می‌توان بیان کرد:
 "هر اندازه‌گیری با درستی مناسب تنها وقتی قابل اجرا است که بتوان برای هر خاصیت قابل اندازه‌گیری از یک جسم یا آیتم و پارامتر معینی از مدل آن جسم یا آیتم، رابطه‌ای با درستی بالا برقرار کرد."

بدین ترتیب پارامتر یک مدل از جسم یا آیتم، مقدار واقعی کمیت قابل اندازه‌گیری است. اصول مقدماتی نظریه اندازه‌گیری - که می‌توان آن را به صورت اصول موضوعه نظریه اندازه‌گیری بیان نمود- عبارتند از:

۱- مقدار واقعی هر کمیت قابل اندازه‌گیری وجود دارد؛

۲- مقدار واقعی هر کمیت قابل اندازه‌گیری ثابت است؛

۳- به مقدار واقعی نمی‌توان دست یافت.

برای تبیین اصل موضوعه شماره سه، می‌توان به اختلاف بین مدل و جسم اشاره نمود. محدودیت‌های اجتناب‌ناپذیر دیگری نیز برای نزدیکی به مقدار واقعی کمیت قابل اندازه‌گیری وجود دارد. به این دلیل می‌توان گفت که "همیشه نتیجه‌ی هر اندازه‌گیری توأم با خطا است."

طبقه‌بندی اندازه‌گیری‌ها

مدت‌ها است که اندازه‌گیری‌ها به صورت مستقیم، غیر مستقیم و مرکب طبقه‌بندی می‌شوند. در سال‌های اخیر اندازه‌شناس‌ها، اندازه‌گیری مرکب را به اندازه‌گیری مرکب مطلق و اندازه‌گیری لحظه‌ای تقسیم می‌کنند. این طبقه‌بندی به روش مورد استفاده در پردازش داده‌های تجربی، جهت دستیابی به نتیجه اندازه‌گیری و برآورد عدم قطعیت آن مربوط می‌شود. دراندازه‌گیری‌های مستقیم، آیتم مورد اندازه‌گیری به اندرکنش با دستگاه اندازه‌گیری می‌پردازد و مقدار اندازه‌ده توسط نشاندگی دستگاه قرائت می‌شود. گاهی ممکن است قرائت‌ها جهت تصحیح در ضربی ضرب شوند.

دراندازه‌گیری‌های غیر مستقیم مقدار کمیت قابل اندازه‌گیری از ارتباط معلوم این کمیت و شناسه^۱ آن مشخص می‌شود. شناسه از طریق چند اندازه‌گیری مستقیم و گاهی غیر مستقیم یا لحظه‌ای و یا مرکب به دست می‌آید. به عنوان مثال، چگالی یک ماده جامد همگن با تقسیم جرم ماده بر حجم آن محاسبه می‌شود. جرم و حجم ماده هم با اندازه‌گیری مستقیم قابل دسترسی است.

برای به دست آوردن مقدار کمیت‌های قابل اندازه‌گیری از اندازه‌گیری‌های مرکب و لحظه‌ای نیز

1- Argument

استفاده می‌شود. هردو روش بر مبنای حل دستگاه معادلاتی است که ضریب هر جمله نتیجه‌ی اندازه‌گیری‌ها است. در هر دو روش از روش کمترین مربعات استفاده می‌شود. اما تفاوت آن‌ها در این است که در اندازه‌گیری‌های مرکب چند "کمیت هم نوع" به صورت لحظه‌ای اندازه‌گیری می‌شود؛ در حالی که در اندازه‌گیری لحظه‌ای، چند کمیت مختلف به صورت لحظه‌ای اندازه‌گیری می‌شود. به عنوان مثال، در اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی و ضریب دمایی یک دماسنج مقاومتی در دمای 20°C از طریق اندازه‌گیری مستقیم مقاومت، یک اندازه‌گیری لحظه‌ای داریم در حالی که در اندازه‌گیری جرم، یک سری وزنه‌ی مختلف براساس جرم معلوم یکی از آنها و مقایسه‌ی جرم سایر وزنه‌ها از طریق ترکیب آنها، اندازه‌گیری ما مرکب است. هریک از اندازه‌گیری‌هایی که در بالا به آنها اشاره شد می‌توانند یک یا چند بار تکرار شوند. روش مورد استفاده در پردازش داده‌های تجربی بستگی به تعداد مشاهدات دارد.

به اندازه‌گیری‌هایی که با یک مشاهده‌ی ساده صورت می‌پذیرد اندازه‌گیری‌های ساده و اندازه‌گیری‌هایی که با تکرار مشاهدات صورت می‌پذیرد اندازه‌گیری‌های چندگانه گفته می‌شود. اندازه‌گیری غیر مستقیم که مقدار هر شناسه با نتیجه یک اندازه‌گیری ساده مشخص می‌شود، اندازه‌گیری ساده محسوب می‌شود.

در اندازه‌گیری‌های مرکب اگر درحین اجرای اندازه‌گیری تعداد اندازه‌گیری‌ها با تعداد مجهولات برابر باشد، آن را اندازه‌گیری ساده به حساب می‌آوریم. در اندازه‌گیری‌های مرکب چنانچه رابطه‌ی بین کمیت‌های قابل اندازه‌گیری معلوم باشد، بهتر است اندازه‌گیری‌ها ساده محسوب شوند. به عنوان مثال در اندازه‌گیری زوایای یک مثلث می‌دانیم که مجموع زوایای داخلی مثلث 180° است، باتوجه به این رابطه تنها اندازه‌گیری دو زاویه کفایت می‌کند. این یک اندازه‌گیری مستقیم و ساده است. در صورتی که سه زاویه اندازه‌گیری شود، رابطه‌ی فوق وابستگی مجاز مقادیر برآوردشده را از طریق؛ مثلاً، روش کمترین مربعات مشخص می‌کند. این اندازه‌گیری چند گانه و مرکب است.

اندازه‌گیری‌ها همچنین به اندازه‌گیری‌های دینامیک و استاتیک نیز تقسیم می‌شوند. در اندازه‌گیری استاتیک دستگاه اندازه‌گیری به صورت استاتیک و در اندازه‌گیری دینامیک دستگاه اندازه‌گیری به صورت دینامیک مورد استفاده قرار می‌گیرد. در اندازه‌گیری استاتیک سیگنال خروجی ثابت است. به بیان دیگر نشان‌دهنده‌ی دستگاه اندازه‌گیری در طی زمان لازم برای قرائت آن ثابت خواهد بود در حالی که در اندازه‌گیری دینامیک سیگنال خروجی نسبت به زمان تغییر می‌کند. برای حصول نتیجه‌ی اندازه‌گیری این تغییرات را باید در نظر داشت.

سیستم‌های اندازه‌گیری و فرآیندهای اندازه‌گیری

در استاندارد ایران - ایزو ۹۰۰۱، سیستم به صورت زیر تعریف شده است:

"مجموعه عناصر دارای ارتباط درونی یا دارای تعامل."

باتوجه به تعریف فوق یک سیستم اندازه‌گیری شامل کلیه مولفه‌های با ارتباط درونی یا دارای

تعامل است که در حصول نتیجه اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌گیرد.

در راهنمای تحلیل سیستم‌های اندازه‌گیری (MSA) یک سیستم اندازه‌گیری عبارت است از:

مجموعه‌ای از عملیات‌ها، روش‌های اجرایی، سنج‌ها و سایر تجهیزات، نرم‌افزار و کارکنان مورد استفاده جهت اختصاص عددی به ویژگی مورد اندازه‌گیری و تمام فرآیندهای مورد استفاده در انجام اندازه‌گیری.

به جنبه‌ی سیستمی یک فرآیند اندازه‌گیری، سیستم اندازه‌گیری گفته می‌شود. بعضی از عناصر

مورد نظر در یک سیستم اندازه‌گیری عبارتند از:

- روش آزمون / اندازه‌گیری؛
 - تجهیزات اندازه‌گیری و آماده سازی آن؛
 - کارکنان درگیر در اندازه‌گیری و نگهداری تجهیزات و فرآیند اندازه‌گیری؛
 - ساختار سازمانی و مسئولیت‌ها؛
 - فنون و ابزارهای کنترل کیفیت؛
 - سازو کار اقدام اصلاحی و پیشگیرانه جهت حذف عیوب عملکرد.
- فرآیند در استاندارد ایران - ایزو ۹۰۰۰، به صورت زیر تعریف شده است:
- "مجموعه فعالیت‌های مرتبط به هم یا متعامل که دروندادها را به برون‌دادها تبدیل می‌کند."
- با توجه به این تعریف، درونداد یک فرآیند اندازه‌گیری شامل موارد زیر است:
- موضوع مورد اندازه‌گیری که به واسطه آن اندازه‌ده تعریف می‌شود؛
 - تجهیزات و یا دستگاه‌های اندازه‌گیری و آماده‌سازی آن‌ها؛
 - کاربری که اندازه‌گیری را انجام می‌دهد؛
 - آزمایشگاه یا محلی که اندازه‌گیری انجام می‌شود؛
 - روش اندازه‌گیری.

برونداد یک فرآیند اندازه‌گیری، نتیجه‌ی اندازه‌گیری است. مجموعه فعالیت‌های دارای ارتباط

درونی یا دارای تعامل، فعالیت‌هایی هستند که در انجام اندازه‌گیری ضروری‌اند. این فعالیت‌ها در

روش اندازه‌گیری تعریف می‌شوند. یک فرآیند اندازه‌گیری از چند جهات با فرآیند تولید قابل

مقایسه است. دروندادهای فرآیند تولید، مواد اولیه، ماشین آلات، روش، فرد و محیط فرآیند تولید

است و برون داد آن؛ فرآورده تولید شده است. فرآیند تولید همواره تحت تاثیر تغییرات ذاتی خود قرار دارد و نتیجه‌ی آن تغییر پذیری مشاهدات اندازه‌گیری است.

همانگونه که اشاره شد فرآیند اندازه‌گیری به صورت مجموعه‌ای از منابع با ارتباط درونی، فعالیت‌ها و تاثیر آن‌ها بر اندازه‌گیری تعریف می‌شود. منابع با ارتباط درونی که بخشی از فرآیند اندازه‌گیری است شامل تجهیزات اندازه‌گیری یا آماده‌سازی آن، روش اندازه‌گیری و کاربری که اندازه‌گیری را انجام و نتایج را به دست می‌آورد، می‌شود. فعالیت‌ها با ارتباط درونی شامل آماده‌سازی و اقدامات اولیه، تصدیق و صحه‌گذاری روش اندازه‌گیری، عملکرد و کنترل فرآیند اندازه‌گیری است.

فرآیند اندازه‌گیری گاهی سیستم اندازه‌گیری نامیده می‌شود و به صورت مجموعه‌ای از عملکردها، روش‌های اجرایی، سنجها و سایر تجهیزات، نرم افزار و کارکنان مورد استفاده در نظر گرفته می‌شود. سیستم‌های اندازه‌گیری برای بررسی محصولات و نشان دادن انطباق آن‌ها با ویژگی‌های تعریف شده، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی

قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی عبارت است از: "قابلیت ارتباط دادن مقدار یک استاندارد یا نتیجه‌ی یک اندازه‌گیری با مرجع‌های ملی یا بین‌المللی، از طریق زنجیره پیوسته‌ی مقایسه‌ها که همگی عدم قطعیتی معین دارند."^۱

قابل ذکر است که "در آزمایشگاه‌ها، برنامه‌ی کالیبراسیون تجهیزات باید طراحی و اجرا شود تا اطمینان حاصل گردد که کالیبراسیون‌ها و اندازه‌گیری‌های آزمایشگاه به سیستم بین‌المللی یکاها (SI) قابلیت ردیابی دارند."^۲

هرگاه از استانداردهای ملی صحبت می‌شود منظور استانداردهایی است که در مراکز ملی اندازه‌سناسی (NMI) هرکشوری نگهداری می‌شود. NMI در هر کشوری از بالاترین سطح در قابلیت ردیابی برخوردار است. این مراکز، استانداردهایی را که BIPM تعریف می‌کند، پدیدآوری و نگهداری می‌کنند.

۱- استاندارد ملی ۴۷۲۳

۲- بند ۵-۶-۲-۱ استاندارد ۱۷۰۲۵

برخی از مراکز مانند انجمن آمریکایی تایید صلاحیت آزمایشگاه^۱ و اتحادیه بین‌المللی تایید صلاحیت آزمایشگاه^۲، شش مشخصه برای برقراری قابلیت ردیابی تعریف کرده‌اند:

- زنجیره‌ی پیوسته مقایسه‌ها
- قابلیت ردیابی توسط زنجیره‌ی پیوسته مقایسه‌ها و از استانداردهای بین‌المللی یا ملی شروع و به استانداردهای مرجع کاری یک آزمایشگاه اندازه‌شناسی ختم می‌شود.
- عدم قطعیت اندازه‌گیری
- عدم قطعیت اندازه‌گیری باید برای هر مرحله از زنجیره‌ی قابلیت ردیابی براساس روش‌های مشخص برآورد و اعلام گردد تا عدم قطعیت کل قابل محاسبه باشد.
- مستندسازی
- هر مرحله از زنجیره مطابق با روش‌های اجرایی، مستند، اجرا و نتایج آن به صورت گزارش آزمون یا کالیبراسیون ثبت شود.
- شایستگی
- آزمایشگاه‌ها یا موسساتی که یک یا چند مرحله از زنجیره را برعهده دارند باید شواهدی از شایستگی فنی خود مانند تایید صلاحیت نهادهای گواهی‌کننده، ارائه کنند.
- ارجاع به سیستم SI
- در صورت امکان استانداردهای ملی و بین‌المللی که براساس سیستم SI پدید می‌آیند استانداردهای اولیه باشند.
- کالیبراسیون مجدد
- کالیبراسیون استانداردها باید در فواصل زمانی مقتضی انجام شود به طوری که قابلیت ردیابی نتایج اندازه‌گیری برقرار باشد.
- مفهوم زنجیره پیوسته مقایسه‌ها که به استانداردهای ملی و بین‌المللی برمی‌گردد چیست؟ آیا این بدان معناست که آزمایشگاه‌ها باید استانداردهای خود را جهت کالیبراسیون به یک مرکز ملی اندازه‌شناسی (NMI) بفرستند؟ پاسخ به این سئوالات هم ساده است و هم پیچیده.
- آزمایشگاه مجبور نیست که استانداردهای خود را جهت کالیبراسیون مجدد به NMI بفرستد؛ اما باید قادر به اثبات وجود زنجیره‌ی پیوسته مقایسه‌ها باشد. از این طریق به مشتریان می‌تواند نشان دهند که به استاندارد ملی و یا بین‌المللی قابلیت ردیابی دارند.

1- A2LA

2- ILAC

برای پایش قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی در هر سازمان و یا آزمایشگاهی از فرم زیر می‌توان استفاده کرد. نهادهای تایید صلاحیت نیز می‌توانند از آن استفاده کنند.

فرم ارزیابی قابلیت ردیابی

توضیحات	مثال‌هایی خاص از شواهد	انطباق بلی/خیر
زنجیره ناگسسته از شواهد استانداردها (مرجع، کاری یا...) نمایش زنجیره ناگسسته به سیستم SI		
مستندات عدم قطعیت (مورد نیاز برای هر مرحله از هرم قابلیت ردیابی)		
روش‌های اجرایی مستند شده (مستندات مناسب، کاربردی و روش‌های اجرایی معتبر)		
صلاحیت‌های فنی تایید شده (مستندات ارایه شده برای صلاحیت‌های فنی)		
تحقق یکاهای سیستم SI		
فواصل کالیبراسیون		
فواصل کالیبراسیونی که گذشته است		
تضمین اندازه‌گیری		

مثال: روش ارزیابی بررسی قابلیت ردیابی آزمایشگاه
سه گزارش کالیبراسیون از سال گذشته را انتخاب کنید. برای اطمینان از قابلیت ردیابی هر
کالیبراسیون اطلاعات زیر را شناسایی نمایید.

آیتم ارزیابی شده	شواهد
گواهی نامه کالیبراسیون انتخاب شده	
تعداد آزمون‌های استانداردهای اندازه‌گیری	
تاریخ کالیبراسیون استانداردهای اندازه‌گیری	
فواصل کالیبراسیون	
تحلیل مولفه‌های عدم قطعیت	
نام فایل عدم قطعیت که داده‌ها در آن نگهداری می‌شوند	
دستورالعمل‌های مستند شده	
شواهد مربوط به صلاحیت‌ها	
نوع تضمین اندازه‌گیری‌ها	
نام فایل تضمین اندازه‌گیری‌ها که داده‌ها در آن نگهداری می‌شوند	
محتوای گزارش مربوط به بیانیه قابلیت ردیابی	

شما باید قادر به شناسایی هرگونه مشکل و اقدام اصلاحی در آزمایشگاه در رابطه با قابلیت ردیابی، تحلیل عدم قطعیت و اطمینان از اندازه‌گیری باشید.

قابلیت ردیابی در CIPM-MRA

مراکز ملی اندازه‌شناسی و موسسات منتخب (DI) که توانمندی‌های اندازه‌گیری و کالیبراسیون (CMC) آن‌ها در پایگاه داده‌های مقایسه کلیدی (KCDB) دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها ثبت شده است، دو گزینه در برقراری قابلیت ردیابی به SI دارند.

۱- از طریق تحقق اولیه یا نمایش یکای اندازه‌گیری مورد نظر. در این صورت در قابلیت ردیابی باید به SI تحقق یافته‌ی قابل نمایش، اشاره شود؛

۲- از طریق NMI یا DI دیگری که دارای CMC‌های مرتبط با عدم قطعیت مناسب بوده و در KCDB ثبت شده است و یا از طریق خدمات اندازه‌گیری و کالیبراسیون ارائه شده توسط BIPM. در این صورت در قابلیت ردیابی باید به آزمایشگاه ارائه‌دهنده‌ی خدمات نیز اشاره شود.

در موارد استثنایی، اگر هیچ یک از این دو روش مستقیماً امکان‌پذیر نباشد، روش جایگزین در برقراری قابلیت ردیابی به یک استاندارد شناخته شده، می‌تواند از طریق پیشنهادات کمیته مشورتی مرتبط CIPM صورت پذیرد. فهرست موارد استثنایی در پورتال BIPM و در بخش مستندات CIPM-MRA قابل دسترسی است. این فهرست متناوباً توسط کمیته‌های مشورتی بازنگری می‌شود. در مورد مطالب گفته شده باید به موارد زیر توجه کرد:

الف- برای اعتبار بخشی به تحقق اولیه یا نمایش یکای اندازه‌گیری، لازم است موضوع به تایید کمیته مشورتی مربوط در BIPM برسد.

ب- وقتی CMC‌های NMI یا DI‌ها به سازمان‌های منطقه‌ای یا بین‌المللی ارائه می‌شود باید امکان ارزیابی کامل بیلان عدم قطعیت و مسیر قابلیت ردیابی اندازه‌گیری‌ها وجود داشته باشد.

پ- برای یک اندازه‌ده مشخص، اگر سهم عدم قطعیت‌های تاثیرگذار جانبی - که جزیی از زنجیره‌ی اصلی مسیر قابلیت ردیابی به SI محسوب نمی‌شوند- ناچیز باشد و بتوان نشان داد که تاثیر چندانی در عدم قطعیت مرکب CMC ندارند، مطابق توافقات به امضا رسیده در ILAC، آزمایشگاه‌های ارائه دهنده خدمات، می‌توانند از آن‌ها صرف‌نظر کنند.

ت- مسیر قابلیت ردیابی در حالت ۱ شامل NMI‌ها یا DI‌هایی هم می‌شود که از مواد مرجع گواهی شده (CRM) یا مواد مرجع شیمیایی با درجه خلوص بسیار بالا استفاده می‌کنند و تعیین مقدار اختصاص یافته به آن با بکارگیری توانمندی‌های اندازه‌گیری توصیف شده و به رسمیت شناخته شده و منتشر شده در CMC‌ها، انجام می‌شود.

فصل چهارم

دستگاه‌های اندازه‌گیری و مشخصات آنها

به همان خوبی که اندازه‌گیری می‌کنید،
می‌توانید تولید کنید.
موتو
ارزش واقعی یک عدد، ماندگارتر از کتابخانه‌های
گران قیمت و پر از فرضیه است.
Ribert. J. Mayer 1840

انواع دستگاه‌های اندازه‌گیری

دستگاه‌های اندازه‌گیری به سنج‌های مادی، ترانس‌دیوسرهای اندازه‌گیری، دستگاه‌های نشان‌دهنده، دستگاه‌های مرکب و سیستم‌های اندازه‌گیری تقسیم می‌شوند.
سنج‌های مادی، دستگاه‌های اندازه‌گیری و سنج‌های هستند که یک یا چند کمیت فیزیکی با مقدار معلوم را باز تولید می‌کنند. وزنه‌ها، مقاومت‌ها و خازن‌های استاندارد در این گروه قرار دارند.
در اینجا باید بین سنج تک مقداری و سنج‌های چند مقداری تفکیک قائل شد. خط‌کش، متر نواری و جعبه مقاومت مثال‌هایی از سنج‌های چند مقداری است. علاوه بر سنج‌های چند مقداری که مقادیر گسسته‌ای را باز تولید می‌کنند، سنج‌های چند مقداری دیگری نیز وجود دارد که مقادیر پیوسته‌ای را در گستره‌ی مشخصی مانند خازن متغیر، باز تولید می‌کنند. اصولاً درستی سنج‌های چند مقداری پیوسته کمتر از سنج‌های چند مقداری گسسته است. هنگام استفاده از این سنج‌ها در اندازه‌گیری، اندازه‌ها را با مقدار سنج مادی مقایسه می‌کنیم این مقایسه به صورت دیفرانسیلی انجام می‌شود.
یک مقایسه‌گر، وسیله‌ی اندازه‌گیری و سنج‌های است که بین کمیت‌های فیزیکی مشابه

مقایسه‌ای انجام می‌دهد و حساسیت مشخصی دارد. در اندازه‌گیری طول یک جسم با خط‌کش، خط‌کش نقش یک مقایسه‌گر را بازی می‌کند.

ترانسدیوسر اندازه‌گیری، دستگاه اندازه‌گیری است که سیگنال اندازه‌گیری را به شکل مناسبی تبدیل، منتقل، پردازش و یا ذخیره می‌کند. اطلاعات اندازه‌گیری در خروجی ترانسدیوسر را مستقیماً نمی‌توان مشاهده کرد. ترانسدیوسرهای اندازه‌گیری با المان‌های یک دستگاه اندازه‌گیری پیچیده که وظیفه انتقال سیگنال را به عهده دارند، تفاوت دارد. ترانسدیوسرهای اندازه‌گیری انواع مختلفی مانند ترموکوپل، دماسنج مقاومتی و الکتروود PH متر دارند. ترانسفورمر جریان یا ولتاژ و آمپلی فایر ها هم جزء ترانسدیوسرها هستند. اما ویژگی این ترانسدیوسرها آن است که کمیت ورودی و خروجی آنها مشابه هم هستند فقط بزرگی آنها متفاوت است.

ترانسدیوسری که کمیت ورودی آنالوگ را به سیگنال گسسته در خروجی تبدیل می‌کند، مبدل‌های آنالوگ به دیجیتال گفته می‌شود. این مبدل‌ها جزء لاینفک وسایل دیجیتالی هستند؛ اما از آنها در پایش و سیستم‌های کنترلی نیز استفاده می‌شود.

دستگاه‌های نشان‌دهنده، دستگاه‌های اندازه‌گیری و سنجشی هستند که سیگنال اندازه‌گیری را مستقیماً به صورت قابل مشاهده تبدیل می‌کنند. جنبه‌ی مشترک در تمام دستگاه‌های نشان دهنده وجود وسیله قرائت است و به دو صورت آنالوگ یا دیجیتال هستند. نشان‌دهنده‌های دیجیتالی را می‌توان به سادگی در کامپیوتر ثبت کرد و از درستی قابل ملاحظه‌ای نسبت به دستگاه‌های آنالوگ برخوردار می‌باشند. در بعضی از موارد، دستگاه‌های اندازه‌گیری طوری طراحی می‌شوند که هم نشان دهنده باشند و هم ثبت کننده. به این دستگاه‌ها، نشان‌دهنده گفته می‌شود. این دستگاه‌ها یا به صورت خودکار تغییرات داده‌ها را نسبت به زمان ثبت می‌کنند که به آن دستگاه‌های رسم کننده خودکار گفته می‌شود و یا آنها را به صورت یک سری داده چاپ می‌کنند که به آن دستگاه‌های چاپگر گفته می‌شود. لازم به ذکر است که این داده‌ها به صورت دیجیتالی (گسسته) ثبت می‌شوند.

بعضی از دستگاه‌های اندازه‌گیری مقایسه‌گر دارای نشان‌دهنده‌هایی هستند که به صورت صفر^۱ کار می‌کنند. از این روش زمانی استفاده می‌شود که نشان دهنده‌ی دستگاه، نظیر گالوانومتر از حساسیت بالایی برخوردار باشد. یک اندازه‌گیری مرکب، مجموعه‌ای از دستگاه‌ها، تجهیزات و وسایل اندازه‌گیری است که به صورت یکپارچه جمع‌آوری شده است تا اندازه‌گیری‌هایی را انجام دهد؛ به عنوان، مثال دستگاه مولتی فانکشن که در کالیبراسیون دستگاه‌های اندازه‌گیری الکتریکی به کار می‌رود.

1- null

یک سیستم اندازه‌گیری مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها، محاسبات و وسایل جانبی است که برای به‌دست آوردن اطلاعات اندازه‌گیری و تبدیل یا پردازش آن‌ها به صورت لازم در سیستم‌های کنترل و انجام خودکار فعالیت‌های منطقی به کار می‌رود. سیستم‌های اندازه‌گیری مدرن شامل میکروپروسورها، کامپیوترها و ... است.

مشخصه‌های عملکردی دستگاه‌های اندازه‌گیری

مشخصه‌های مربوط به عملکرد یک دستگاه اندازه‌گیری را می‌توان به دو شکل زیر طبقه‌بندی کرد.

الف - مشخصه‌های استاتیکی

ب - مشخصه‌های دینامیکی

وقتی که ورودی دستگاه اندازه‌گیری نسبت به زمان ثابت و یا به آهستگی تغییر کند مشخصه‌های دستگاه استاتیکی‌اند؛ مانند دقت، تفکیک پذیری، حساسیت، خطی بودن، پسماند، رانش و ... که به خوبی قادرند توصیفی کمی از دستگاه اندازه‌گیری ارائه دهند. در صورتی که، ورودی دستگاه اندازه‌گیری ثابت نباشد و تغییرات ناگهانی نسبت به زمان از خود نشان دهد، باید مشخصه‌های دینامیکی دستگاه نیز بررسی شود.

به‌طور کلی، این مشخصه‌ها از طریق رابطه‌ی بین پارامترهای خروجی و ورودی با معادلات دیفرانسیل مناسبی نشان داده می‌شوند. شایان ذکر است که در یک دستگاه اندازه‌گیری ممکن است مشخصه‌های دینامیکی و استاتیکی هم زمان حضور داشته باشند. به هر حال، برای سیگنال‌های مستقل از زمان، فقط مشخصه‌های استاتیکی باید مورد توجه قرار گیرد.

پارامترهای استاتیکی مربوط به عملکرد دستگاه اندازه‌گیری با انجام آزمون‌های مشخصی (بستگی به نوع دستگاه) به دست می‌آید. بخشی از این پارامترها با کالیبراسیون و به صورت دوره‌ای، مورد بازبینی قرار می‌گیرد. این کار با اعمال مقادیر ثابت به ورودی و مشاهده نتایج خروجی، انجام می‌پذیرد. اما اغلب اوقات در یافتن مقادیر ثابت معلوم برای کمیت ورودی مشکل داریم. در این خصوص توجه به موارد زیر ضروری است:

الف - بطور کلی تغییر حساسیت دستگاه - که از تاثیر اختلالات مشخصی ناشی می‌شود - به یک اندازه بر تمام خروجی‌ها تأثیر می‌گذارد. این تغییرات از فرسودگی قطعات، اثر تغییرات شرایط محیطی بر دستگاه، کاربر و غیره ناشی می‌شود؛

ب - با تکرار اندازه‌گیری‌ها، ناتوانی دستگاه در ارایه‌ی خروجی‌های یکسان به ازای هر مقدار مشخص ورودی، باعث پراکندگی مقادیر خروجی در یک گستره معین می‌شود که این

پراکندگی ناشی از تغییرات تصادفی در ورودی و یا سیستم اندازه‌گیری است.

خطای اندازه‌گیری

اگر در اندازه‌گیری کمیتی که مقدار واقعی آن A است مقدار برآورد شده A' باشد خطای اندازه‌گیری مطلق اختلاف بین A' و A خواهد بود: $e = A' - A$ ؛ اما، با این رابطه هرگز نمی‌توان خطای اندازه‌گیری را به این دلیل ساده که همیشه مقدار واقعی کمیت قابل اندازه‌گیری ناشناخته است، محاسبه کرد و به همین دلیل خطاهای اندازه‌گیری باید از طریق داده‌های غیرمستقیم برآورد گردند. اجزای اصلی هر اندازه‌گیری را روش اندازه‌گیری و دستگاه اندازه‌گیری تشکیل می‌دهد و چون اندازه‌گیری توسط کاربر انجام می‌شود خطای آن‌ها نیز به نحوی در اندازه‌گیری حضور دارد. بنابراین شکل کلی خطای اندازه‌گیری به صورت زیر خواهد بود:

$$e = e_m + e_i + e_p$$

که e_m خطای روش، e_i خطای دستگاهی و e_p خطای کاربر است. هریک از مولفه‌های فوق خود از عوامل مختلفی ناشی می‌شوند. خطای روش از کامل نبودن نظریه‌ی مربوط به پدیده‌ای که اندازه‌گیری براساس آن انجام می‌شود به وجود می‌آید. خطای ناشی از اختلاف بین مدل اندازه‌گیری و آیت مورد نظر نیز جزء خطاهای روش محسوب می‌شود. خطای دستگاهی به دلیل ناکاملی دستگاه اندازه‌گیری است؛ اما باید خطای ذاتی دستگاه اندازه‌گیری؛ یعنی، خطایی که تحت شرایط کاری مرجع و شرایط عادی دستگاه اندازه‌گیری بروز می‌کند از سایر خطاها؛ یعنی، خطاهایی که از تاثیر انحراف مقدار کمیت‌ها تحت شرایط مرجع ناشی می‌شوند، تفکیک کرد. خطای کاربر از اشتباهات فردی در قرائت و یا ثبت نتایج اندازه‌گیری به وجود می‌آید. با توجه به توسعه‌ی دستگاه‌های اندازه‌گیری و امکانات جانبی آنها در ثبت نتایج، خطای کاربر رو به کاهش است. این طبقه‌بندی خطاهای اندازه‌گیری براساس علل بروز آنها است. طبقه‌بندی مهم دیگر خطاهای اندازه‌گیری براساس خواص آنها صورت می‌پذیرد. با این رویکرد خطاها یا سیستماتیک هستند و یا تصادفی.

برای تعریف خطای تصادفی فرض کنید که کمیتی، چندین بار اندازه‌گیری می‌شود. اگر بین نتایج اندازه‌گیری اختلافی باشد و این اختلاف غیر قابل پیش بینی باشد، در این صورت خطای ناشی از پراکندگی نتایج را خطای تصادفی می‌نامند.

در استاندارد ملی ۴۷۲۳ خطای اندازه‌گیری تصادفی بدین صورت تعریف شده است:
 "مولفه خطای اندازه‌گیری که در تکرار اندازه‌گیری‌ها با یک روند غیر قابل پیش‌بینی تغییر می‌کند."

با تکرار اندازه‌گیری‌ها بر روی یک کمیت -که شرایط یکسان دارند- می‌توان به خطاهای تصادفی پی برد، درحالی که خطاهای سیستماتیک را می‌توان با مقایسه‌ی نتایج اندازه‌گیری بر روی یک کمیت با استفاده از روش‌های مختلف -که به‌وسیله‌ی دستگاه‌های اندازه‌گیری دقیق انجام می‌شود- بررسی کرد.

در استاندارد ملی ۴۷۲۳ خطای اندازه‌گیری سیستماتیک بدین صورت تعریف شده است:
 "مولفه خطای اندازه‌گیری که در تکرار اندازه‌گیری‌ها ثابت می‌ماند یا بایک روند قابل پیش‌بینی تغییر می‌کند."

وقتی از خطاها صحبت می‌کنیم باید بین خطاهای مربوط به مقادیر پرت و اشتباهات سهوی تمایز قائل شویم. مقادیر پرت در اندازه‌گیری‌های پیاپی و با روش‌های آماری قابل شناسایی اند. اشتباهات سهوی در آزمایشات تجربی رخ می‌دهند و با روش‌های غیر آماری قابل شناسایی هستند.

شناسایی و حذف خطاهای سیستماتیک

در هر اندازه‌گیری با درستی بالا، حذف خطاهای سیستماتیک بسیار مهم است؛ اما، خطاهای سیستماتیک را نمی‌توان در عمل کاملاً حذف نمود. بنابراین همواره بخشی از خطاها وجود دارند که در اندازه‌گیری باقی می‌مانند. لذا باید به چنین خطاهایی توجه ویژه داشت و آن‌ها را برآورد کرد. گاهی اوقات برخی از خطاهای سیستماتیک باقی مانده را به دلیل آن که مقادیرشان نامعلوم است تصادفی فرض می‌کنند، در حالی که این دیدگاه همیشه پذیرفتنی نیست.

در بررسی خطاهای سیستماتیک و تصادفی توجه خود را باید از بزرگی آن‌ها به خواص آن‌ها معطوف کرد. به عنوان مثال در اندازه‌گیری مقاومت یک رزیستور، اثرات دما قابل تصحیح است، مشروط بر آن که دما و ضریب دمایی رزیستور کاملاً مشخص باشد. بنابراین، ظاهراً چنین خطای سیستماتیکی قابل حذف است؛ اما نکته قابل توجه آن است که دسترسی ما به مقادیر دما و ضریب دمایی با درستی محدودی امکان پذیر است، پس خطاهای باقی مانده چه کوچک و چه بزرگ ممکن است قابل برآورد باشند؛ اما دسترسی به مقدار واقعی آن‌ها امکان پذیر نخواهد بود.

خطاهای سیستماتیک و تصادفی را می‌توان از منابع و خواص آنها تشخیص داد. معمولاً خطاهای سیستماتیک سه منبع اصلی دارند: روش اندازه‌گیری، دستگاه اندازه‌گیری و کاربر.

خطاهای ناشی از روش اندازه‌گیری از ناکاملی روش اندازه‌گیری، درستی محدود و فرمول‌های مورد استفاده در توصیف پدیده‌ای که اندازه‌گیری بر مبنای آن صورت می‌پذیرد، ناشی می‌شود. این خطا همچنین به دستگاه اندازه‌گیری مورد استفاده نیز ارتباط دارد. خطای سیستماتیک دستگاهی، خطایی است که به دلیل ناکاملی دستگاه اندازه‌گیری بروز می‌کند. عدم دقت در کالیبراسیون دستگاه اندازه‌گیری و همچنین خطاهای نصب و راه اندازی دستگاه‌ها از جمله خطاهای دستگاهی به حساب می‌آیند.

بررسی خطاهای سیستماتیک از دیدگاهی دیگر

خطای سیستماتیک نوع اول، خطای بزرگی است که وجود آن را فقط از طریق کالیبراسیون دستگاه اندازه‌گیری می‌توان شناخت. به عنوان مثال اگر یک ترانسدیوسر فشار، ترموکوپل، ولت متر و ... را کالیبره نکنیم، مجبوریم خطای بزرگی را در اندازه‌گیری‌ها بپذیریم؛ اما با کالیبراسیون، خطای بزرگ ناشی از عدم کالیبراسیون را با خطای کوچکتر مربوط به فرآیند کالیبراسیون تعویض می‌کنیم.

خطای سیستماتیک نوع دوم، خطایی است که از وجودش آگاهییم؛ اما مقدار آن را کوچک و غیر قابل تاثیر بر نتایج اندازه‌گیری ارزیابی می‌کنیم؛ مثلاً، قابلیت هدایت گرمایی ترموکوپل سبب بروز یک خطای سیستماتیک می‌شود که از آن می‌توان صرف‌نظر کرد. چنانچه از این خطاها صرف‌نظر کنیم در برآورد عدم قطعیت نیز دخالت داده نمی‌شوند؛ اما باید همواره در صرف‌نظر کردن از این نوع خطاها محتاط بود.

خطای سیستماتیک نوع سوم از نوع خطاهای بزرگی است که آن را می‌توان با روش‌های مختلفی از جمله طراحی، استفاده از دستگاه‌های اندازه‌گیری ویژه و ... حذف کرد. باید توجه داشت، گرچه این خطای سیستماتیک در تحلیل عدم قطعیت دخالت داده نمی‌شود؛ اما اگر چنانچه هنوز در سیستم اندازه‌گیری حضور داشته باشد باید وجود آن را در داده‌ها شناسایی کنیم. کنترل شرایط محیطی مانند دما، رطوبت و ... معمولاً به این منظور صورت می‌پذیرد.

خطای سیستماتیک نوع چهارم مقدار عدم قطعیت اندازه‌گیری را افزایش می‌دهد و از روش تحلیل عدم قطعیت ناشی می‌شود. این خطا با روش‌های مهندسی هم قابل حذف نیست و نمی‌توان از آنها صرف‌نظر نمود و با کالیبراسیون نیز تصحیح نمی‌شود.

خطای سیستماتیک نوع پنجم خطای سیستماتیک نامعلومی است که همواره در فرآیند اندازه‌گیری حضور دارد اما از مقدار ویا تاثیر آن نا آگاهییم. تجربه‌ی بیشتر، کاربران اندازه‌گیری را در شناسایی هرچه بهتر مولفه‌های این خطا و جبران آن‌ها کمک می‌کند.

مدل‌های ریاضی تجهیزات اندازه‌گیری

مدل‌های ریاضی از ابزارهای سودمندی در مطالعه ارتباط بین مقادیر ورودی $x(t)$ و مقادیر خروجی $Z(t)$ تجهیزات اندازه‌گیری است. ساده‌ترین مدل به تجهیزات با رده‌ی صفر مربوط می‌شود؛ که در آن یک رابطه‌ی مستقیم بین مقادیر $x(t)$ و $Z(t)$ برقرار است.

$$a_0 z = b_0 x \Rightarrow z = \frac{b_0}{a_0} x$$

ثابت تناسب $k = \frac{b_0}{a_0}$ ، حساسیت استاتیکی این نوع تجهیزات است. در این حالت، پاسخ $z(t)$ ، آنی بوده و مستقل از سرعت تغییرات می‌باشد. با تقریب خوبی، پاسخ این تجهیزات در مقایسه با زمان تغییرات کمیت ورودی، سریع است. رابطه‌ی بین $x(t)$ و $z(t)$ در تجهیزات با رده‌ی یک، با معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه اول مشخص می‌شود.

$$a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = b_0 x$$

وجود عبارت $a_1 \frac{dz}{dt}$ باعث می‌شود که، Z نتواند به صورت آنی به تغییرات X پاسخ دهد. یک تغییر در X ابتدا در عبارت $a_1 \frac{dz}{dt}$ انعکاس می‌یابد.

در تجهیزات با رده‌ی دو، رابطه‌ی بین $x(t)$ و $Z(t)$ با معادله‌ی دیفرانسیل مرتبه‌ی دوم (مشابه حرکت یک نوسانگر هارمونیک واداشته‌ی میرا) مشخص می‌شود.

$$a_2 \frac{d^2 z}{dt^2} + a_1 \frac{dz}{dt} + a_0 z = b_0 x$$

دماسنج مایع در شیشه‌ی جیوه‌ای را با تقریب خوب می‌توان با مدل رده یک توصیف نمود. اگر T و T_{in} دماهای ورودی و خروجی باشند اختلاف دمای محیط یعنی T_{in} و دمای مخزن دماسنج یعنی T باعث به وجود آمدن شار گرمایی می‌شود که به صورت زیر بیان می‌گردد.

$$\frac{dQ}{dt} = -k \frac{S}{d} (T - T_{in})$$

که، t زمان، k ضریب قابلیت هدایت گرمایی شیشه مخزن، S مساحت مخزن و d ضخامت شیشه است.

گرمای جابجا شده سبب تغییر دمای مخزن می‌شود.

$$dT = \frac{dQ}{C}$$

که C ظرفیت گرمایی جیوه مخزن است. با حذف dQ در دو رابطه‌ی اخیر، معادله دیفرانسیل مرتبه اول که رابطه‌ی بین T و T_{in} را مشخص می‌کند، حاصل می‌شود.

$$C \frac{dT}{dt} + k \frac{S}{d} T = k \frac{S}{d} T_{in}$$

یک دینامومتر فنری - که در اندازه‌گیری نیرو مورد استفاده قرار می‌گیرد - با مدل رده دو قابل توصیف است. کمیت ورودی نیروی F_{in} است که باید اندازه‌گیری شود و کمیت خروجی جابجایی Z

است. مدل بر اساس معادله $\sum F_i = m \left(\frac{d^2 z}{dt^2} \right)$ است. نیروهای وارده علاوه بر نیروی F_{in} ، نیروی

کشسان، $F_{el} = -kz$ و نیروی میرا $F_{fr} = -\eta \left(\frac{dz}{dt} \right)$ هستند. معادله دیفرانسیل مربوط به F_{in} و Z

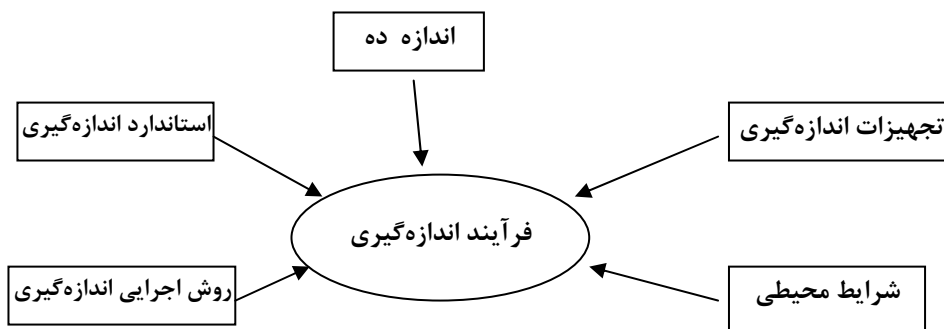
به صورت زیر می‌باشد:

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} + \eta \frac{dz}{dt} + kz = F_{in}$$

تغییرات فرآیند اندازه‌گیری

نتیجه‌ی عملکرد یک فرآیند اندازه‌گیری، نه یک عدد بلکه تعدادی اعداد است. با هر بار اندازه‌گیری، تعدادی نتیجه - که با یکدیگر اختلاف دارند - حاصل می‌شود. همواره باید بین تغییرپذیری طبیعی و ناپایداری تفاوت قائل شد. منابع مختلفی می‌توانند ناپایداری را افزایش دهند. این منابع از عدم کنترل فرآیندها ناشی می‌شود. اشتباه در مرحله‌ی کنترل سبب بروز اریبی و همچنین تغییرپذیری می‌شود. بنابراین هر تغییرپذیری در کالیبراسیون - که اریبی را کاهش می‌دهد - می‌تواند تغییرپذیری در مقادیر اندازه‌گیری به وجود آورد. یک فرآیند اندازه‌گیری مناسب، نتیجه‌ی کنترل منابع اریبی و تغییرپذیری است. با تلاش‌های سیستماتیک، می‌توان فرآیند اندازه‌گیری را بهبود بخشید.

اگر تمام عوامل فرآیند اندازه‌گیری کنترل شود، تکرار اندازه‌گیری‌ها نشان می‌دهد که نتایج، کاملاً مشابه هم نیستند و با یکدیگر اختلاف دارند. بروز این اختلافات به دلیل تغییرات ذاتی فرآیند اندازه‌گیری است که از عوامل زیر حاصل می‌شود:



استاندارد: استانداردهای اندازه‌گیری، رده و کلاس‌های مختلفی دارند. یکی از دلایل اختلاف سطح کیفیت آن‌ها تاثیرپذیری آن‌ها از عوامل گوناگونی است که به تغییر این استانداردها منجر می‌شود.

اندازه‌ده: هیچ اندازه‌ده کاملاً پایدار وجود ندارد. عدم پایداری موجود در مواد اولیه یا اجزاء سیستمی سبب بروز تغییراتی در اندازه‌ده می‌شود. حتی ناپایداری‌های کوچک قادر به ایجاد تغییرات در فرآیند اندازه‌گیری است.

تجهیزات اندازه‌گیری: اندازه‌گیری با هر دستگاه اندازه‌گیری، عدم قطعیتی به همراه دارد. هیچ دستگاه اندازه‌گیری نمی‌تواند مقدار واقعی یک اندازه‌ده را نمایش دهد.

روش اجرایی اندازه‌گیری: روش‌های اجرایی مورد استفاده در اندازه‌گیری، تکرار پذیری و تجدیدپذیری مختلفی دارند. ضمناً کاربران با سطوح تحصیلات و تجربه کاری متفاوت می‌توانند در تغییرات فرآیند اندازه‌گیری دخیل باشند.

شرایط محیطی: شرایط محیطی نقش مهمی در فرآیند اندازه‌گیری به عهده دارد. با وجود اعمال تصحیح برخی از شرایط محیطی؛ مانند دما، ارتفاع از سطح دریا و... همچنان عواملی وجود خواهند داشت که بر فرآیند اندازه‌گیری تاثیر می‌گذارند.

روش‌هایی که در بررسی عوامل موثر بر فرآیند اندازه‌گیری، بکار می‌روند عبارتند از:

الف- برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری؛

ب- تحلیل سیستم اندازه‌گیری (MSA^1)

در روش تحلیل سیستم اندازه‌گیری سه منبع اصلی تغییرات مورد شناسایی قرار گرفته است:

۱- تغییرات سنجه یا دستگاه اندازه‌گیری که تکرارپذیری را بررسی می‌کند؛

۲- تغییرات بازرس یا کاربر که تجدیدپذیری را بررسی می‌کند؛

۳- تغییرات فرآیند (تغییرات جزء به جزء یا part-to-part)

خلاصه این روش به صورت زیر است.

● اگر تکرارپذیری و تجدیدپذیری کمتر از ده درصد باشد، سیستم اندازه‌گیری مورد قبول است.

● اگر تکرارپذیری و تجدیدپذیری بین ۱۰٪ تا ۳۰٪ باشد، عملکرد سیستم ممکن است مورد قبول باشد. این موضوع به اهمیت پارامترهای تحت اندازه‌گیری بستگی دارد.

● اگر تکرارپذیری بزرگتر از تجدیدپذیری باشد، سنجه یا دستگاه اندازه‌گیری نیاز به تعمیر و نگهداری و یا تعویض دارد.

● اگر تجدیدپذیری بزرگتر از تکرارپذیری باشد، بازرس یا کاربر نیاز به آموزش بهتر و یا دستگاه اندازه‌گیری نیاز به کالیبراسیون دارد.
به مثال زیر توجه فرمایید.

قطر پیستونی ۵۰/۷۵ mm اندازه‌گیری می‌شود. در حالی که مشخصات این پیستون 50.0 ± 0.05 mm است. سازنده اعلام کرده است که قبل از هر تصمیم‌گیری لازم است مطمئن شوید که مقدار ۰/۷۵ به پیستون مربوط است. ممکن است این مقدار از تغییرات سیستم اندازه‌گیری ناشی شده باشد.

فصل پنجم

آمار و احتمال

این طبیعت احتمال است که چیزهای
غیرممکن اتفاق خواهد افتاد.
"ارسطو"
منطق واقعی این جهان در حساب
احتمالات است.
"جیمز کلارک ماکسول"
احتمال یعنی حادثه کوچکی که به حوادث
بزرگی منجر می‌شود.
"هانری پوانکاره"

به طور کلی در متون علمی و تخصصی، واژه احتمال در سه طبقه‌بندی قرار می‌گیرد که عبارتند از:

شانس

این واژه به جنبه‌های واقعی جهان اطراف ما مربوط می‌شود. مثل این است که بگوییم در پرتاب یک سکه چقدر احتمال دارد که شیر بیاید و یا این که چقدر احتمال دارد شخص خاصی به سرطان مبتلا شود. در علم روان‌شناسی نیز از این مفهوم خیلی استفاده می‌شود. شانس در واقع به قضایایی درباره‌ی رویدادهای جهان نسبت داده می‌شود. فیزیکدانان معتقدند که احتمال با معنی شانس دارای خصوصیات حداقلی است که آن را از بقیه‌ی انواع احتمال متمایز می‌سازد. شانس چیزی بیش از تعداد دفعات وقوع یک رویداد است. مورد اخیر به نام احتمال آماری خوانده می‌شود.

احتمال شناختی

این نوع احتمال نیز درباره‌ی جنبه‌های واقعی جهان است، این که تا چه حد شواهد تجربی فرضیات مربوط به جهان را تأیید یا تکذیب می‌کنند. در واقع این احتمال، چیزی است که دانشمندان برای تصمیم‌گیری بین فرضیات رقیب، نیاز دارند. اگر شواهد تجربی برای احتمال یک فرضیه، با احتمال، سنجیده شود، چنین احتمالی، احتمال معرفتی یا شناختی است. در واقع می‌توان گفت این نوع احتمال بیشتر از موارد دیگر دارای عینیت است. احتمالات معرفتی ارتباط مستقیم با شواهد دارند و این در واقع مشخصه‌ای است که آن را از شانس متمایز می‌کند. بنابراین درباره‌ی یک موضوع، احتمالات معرفتی متفاوتی می‌توان بیان کرد.

احتمال فاعلی

این نوع احتمال بیان‌کننده‌ی آن است که ما تا چه اندازه به قضایای مختلف اعتقاد و باور شخصی داریم. مثلاً اعتقاد من به این که فرد خاصی در مسابقه‌ی اسبدوانی برنده می‌شود، بیشتر واقعیتی در مورد شخص من است تا آن که درباره‌ی آن فرد خاص یا مسابقه‌ی اسبدوانی باشد. این اعتقاد به آن نیاز ندارد که با شانس یا احتمال معرفتی توجیه شود، بلکه اعتقاد محض من است. این مطلب با نظر شخص دیگری در این که احتمال برنده شدن او بسیار کم است، در تناقض نیست، چون احتمال فاعلی هر کسی در حیطه‌ی خود او می‌گنجد. در احتمال فاعلی، اعتقاد بر این نیست که در پرتاب سکه، احتمال آمدن شیر یا خط، یک دوم است. در عوض، در موضوع احتمال فاعلی جواب صفر یا یک است؛ یعنی، در هر بار پرتاب سکه، اعتقاد آن است که مورد مطلوب رخ می‌دهد یا نه.

مدل‌های ریاضی و فضای نمونه

هدف غایی دانشمندان پیش‌بینی و توصیف پدیده‌های مورد مشاهده در جهان فیزیکی است. توصیف‌ها اصولاً در قالب مدل‌ها؛ یعنی، سیستم‌ها یا ساختارهایی که خواص آن‌ها نسبتاً معلومند، ارائه می‌شود. یک مدل ریاضی یک نظریه ریاضی (و یا سیستم ریاضی) است که در آن لااقل چند عبارت بر حسب جملاتی از پدیده‌های دنیای واقعی فیزیکی تحت بررسی، بیان می‌شود. سیستم ریاضی باید در جهاتی با فرآیند فیزیکی مورد بررسی مشترک و یکسان باشد بنابراین اگر مدل با موفقیت فرآیند فیزیکی را با جملات ریاضی بیان نماید در آن صورت می‌توان ادعا نمود که با این روش می‌توان به یک نتیجه‌گیری درباره فرآیند فیزیکی رسید. به عنوان مثال، با یک معادله‌ی دیفرانسیل حرکت نوسانی ریسمان بررسی می‌شود. با حل معادله دیفرانسیل تابعی را به دست

می‌آوریم که به ما اجازه پیش‌بینی مکان و سرعت نقطه میانی ریسمان بر حسب زمان داده می‌شود. اما کیفیت این پیش‌بینی‌ها دقیقاً به چگونگی تناسب معادله دیفرانسیل با پدیده مورد نظر بستگی خواهد داشت. فرآیند یافتن چنین معادله‌ی دیفرانسیلی همیشه ساده نیست و معمولاً با در نظر گرفتن چندین فرض؛ مثلاً در خصوص ریسمان با فرض این که جرم آن در تمام نقاط یکسان است، تجربیات گذشته و آنالیز سیستم‌های مشابه و یا ساده شده؛ مانند آنالیز برداری نیروی وارد بر ذرات ریسمان، همراه است.

آخرین شرط خوب بودن یک مدل آن است که اطلاعات مفیدی را ارائه دهد. باید تأکید نمود که انگیزه‌ی ما از در نظر گرفتن مدل‌های ریاضی با توجه به نظرات و تصورات صحیح، به دلیل سودمندی آن‌ها است. قضاوت در مورد مدل‌ها و سودمندی آن‌ها وقتی امکان‌پذیر است که بتوان با چند مدل مختلف؛ یک پدیده را بررسی نمود. این وضعیت اصولاً در علم معمول نیست؛ به عنوان مثال، مدل‌های موجی و ذره‌ای در بررسی پدیده نور مورد استفاده قرار می‌گیرد. هر یک از این دو مدل به توصیف جنبه‌هایی از نور که دیگری عاجز است می‌پردازد. بنابراین هر دو مدل مورد استفاده قرار می‌گیرد. باید توجه نمود که استفاده از هر مدلی برای نور بدین معنا نیست که نور چیست. قائل شدن تمایز بین یک مدل (یا نظریه) و فرآیند فیزیکی مدل شده از اهمیت بسزایی برخوردار است. ایراد اصلی نظریه احتمال در فرموله نمودن یک مدل ریاضی برای برآمدهای تجربی است. فرض کنید که برآمدهای ممکن یک آزمایش قابل شناسایی باشد. اولین وظیفه ما نام‌گذاری این برآمدهای قابل تمییز از همدیگر است. به مجموعه تمام برآمدهای ممکن یک آزمایش (S)، فضای نمونه‌ی آن آزمایش گویند. به عنوان مثال فضای نمونه برای یک تاس مجموعه اعداد ۱ تا ۶ است $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ و یا فضای نمونه یک سکه $S = \{H^1, T^2\}$ است. اعضای مجموعه S ممکن است، محدود یا نامحدود باشد.

موضوعی که باید در اینجا به آن اشاره نمود طبیعت تصادفی بودن آزمایش‌ها است. برآمد چنین آزمایش‌هایی با اطمینان قابل پیش‌بینی نیست. به چنین آزمایش‌هایی، آزمایش‌های تصادفی هم گویند. لازم به ذکر است که در بعضی از این آزمایش‌ها اگر اطلاعاتی کافی داده شود برآمد را با اطمینان می‌توان پیش‌بینی نمود. شاید این بیان درست باشد؛ اما حتی اگر چنین اطلاعات پیچیده‌ای هم در دسترس باشد، در این که کاربر بخواهد پیش‌بینی برآمد را تضمین کند، شک وجود دارد. در بعضی از آزمایش‌ها نظیر پیش‌بینی رنگ چشم کودکان قبل از تولد، امکان پیش‌بینی قطعی به دلیل نبود اطلاعات کافی و همچنین عدم دسترسی به تجهیزات اندازه‌گیری مناسب، وجود ندارد.

در حقیقت امکان حذف و یا صرفنظر کردن از عواملی که عدم قطعیت قابل توجهی ندارند به طور صوری و تصویری وجود دارد و چنین عمل می‌شود؛ اما در واقع چنین عدم قطعیت‌هایی از سیستم حذف نمی‌شوند. ما مدل‌ها را برای آزمایش‌ها فرموله می‌کنیم به دلیل این که حداقل با دانش کنونی خود، قادر به پیش‌بینی کامل نتایج نیستیم.

پیشامدها

تعریف یک پیشامد عبارت است از: مجموعه‌ای از اعضای مجموعه S ، یعنی پیشامدها زیر مجموعه، مجموعه‌ی S است. به عنوان مثال، مجموعه پیشامدهای زوج در آزمایش تاس $A = \{2, 4, 6\}$ و یا مجموعه پیشامدهای کوچکتر از ۵؛ یعنی، مجموعه: $B = \{1, 2, 3, 4\}$ مجموعه تهی؛ یعنی، مجموعه‌ای که هیچ عضوی ندارد، زیرمجموعه هر مجموعه‌ای است، $\Phi \subset S$. به عنوان یک رویداد، Φ هرگز رخ نمی‌دهد و بنابراین یک پیشامد غیرممکن است. اگر A و B دو پیشامد باشند. در این صورت:

$$A \cup B \{O : O \in A \text{ or } O \in B\}$$

پیشامد $A \cup B$ اگر و فقط اگر A یا B رخ دهد، روی خواهد داد. بنابراین بهتر است پیشامد $A \cup B$ را پیشامد " A یا B " بنامیم. به طور مشابه: $A \cap B \{O : O \in A \text{ and } O \in B\}$ وقتی رخ می‌دهد که اگر و فقط اگر A و B همزمان رخ دهند و آن را پیشامد " A و B " نیز می‌نامند. اگر $A \cap B = \phi$ باشد در آن صورت مجموعه‌های A و B پیشامدهای دو به دو ناسازگار نامیده می‌شوند.

مثال: یک مهندس الکترونیک دو جعبه مقاومت دارد که هر یک از آن‌ها حاوی چهار مقاومت است. مقاومت‌های جعبه اول برچسب ۱۰ اهمی خورده‌اند؛ اما مقاومت آن‌ها ۹، ۱۰، ۱۱ و ۱۲ اهم است. مقاومت‌های جعبه دوم برچسب ۲۰ اهمی خورده‌اند اما مقاومت آن‌ها ۱۸، ۱۹، ۲۰ و ۲۱ اهم است. این مهندس از هر جعبه‌ای یک مقاومت انتخاب می‌کند. اگر رویداد A مربوط به اولین مقاومت بزرگتر از ۱۰، رویداد B مربوط به دومین مقاومت کوچکتر از ۱۹ و رویداد C مربوط به مجموع مقاومت‌ها که برابر ۲۸ است، باشد، فضای نمونه و رویدادهای A و B و C را تعیین کنید.

پاسخ:

$$\begin{aligned}
 S &= \{(9,18), (9, 19), (9,20), (9, 21), (10, 18), (10, 19), (10, 20), (10, 21), (11, 18), \\
 &\quad (11, 19), (11,20), (11,21), (12, 18), (12,19), (12, 20), (12,21)\} \\
 A &= \{(11, 18), (11, 19), (11,20), (11,21), (12, 18), (12,19), (12, 20), (12,21)\} \\
 B &= \{(9, 18), (10, 18), (11,18), (12,18)\} \\
 C &= \{(9, 19), (10, 18)\}
 \end{aligned}$$

ترکیب پیشامدها

● اجتماع^۱ دو پیشامد: $A \cup B$ پیشامد $A \cup B$ وقتی رخ می‌دهد که A یا B (و یا هر دو) رخ دهد.● اشتراک^۲ دو پیشامد: $A \cap B$ پیشامد $A \cap B$ وقتی رخ می‌دهد که A و B رخ دهد.● مکمل^۳ یک پیشامد ($\bar{A}$ یا A^c)مجموعه برآمدهایی است که همراه A نمی‌باشد. A^c یعنی بدون A بنابراین پیشامد A^c وقتی

رخ می‌دهد که A رخ ندهد.

در مثال قبل:

$$B \cup C = \{(9,18), (10,18), (11,18), (12,18), (9,19)\}$$

$$A \cap B^c = \{(11,19), (11,20), (11,21), (12,19), (12,20), (12,21)\}$$

پیشامدهای A و B را- هر گاه برآمد مشترکی نداشته باشند - دو به دو ناسازگار گویند. به طور

کلی مجموعه پیشامدهای $A_1, \dots, A_n$ را دو به دو ناسازگار گویند هر گاه هیچ یک از آنها، برآمد مشترک نداشته باشد.

در مثال گذشته: اگر برآمد (۱۱، ۱۸) یا (۱۲، ۱۸) باشد، پیشامدهای A و B هر دو رخ می‌دهد.

اگر برآمد (۱۰، ۱۸) باشد B و C رخ می‌دهد. غیرممکن است که A و C با هم رخ دهند به دلیل

اینکه آنها ناسازگارند و برآمد مشترکی ندارند.

1- union

2- intersection

3- Complement

احتمالات

هر پیشامدی در فضای نمونه از احتمال رخ دادن برخوردار است. ذاتاً احتمال معیار کمی روی دادن یک پیشامد است. تفاسیر مختلفی برای احتمال وجود دارد که یکی از آن‌ها این است که، هر گاه آزمایشی به دفعات تکرار شود، احتمال یک پیشامد نسبت دفعاتی است که رخ می‌دهد. معمولاً از حرف P برای بیان احتمال استفاده می‌شود. بنابراین، $P(A)$ ؛ یعنی، احتمال این‌که پیشامد A اتفاق بیفتد. در بعضی موارد تنها راه برآورد احتمال یک پیشامد، تکرار آزمایش به دفعات متعدد و محاسبه نسبت تعدادی است که پیشامد اتفاق می‌افتد، به عنوان مثال، اگر بخواهیم احتمال مدارات چاپی معیوب را در کارخانه‌ای برآورد کنیم، لازم است که تعدادی از این مدارات تولید و آزمون شوند تا نسبت مدارات چاپی معیوب محاسبه گردد. در مواقعی هم احتمال با علم به طبیعت فیزیکی آزمایش قابل محاسبه است، به عنوان مثال، اگر بدانیم که شکل یک تاس مکعب کامل و جرم آن به طور یکنواخت توزیع شده است، در آن صورت احتمال روی دادن هر یک از اعداد با هم برابرند.

احتمال بعضی از پیشامدها به روش ریاضی قابل محاسبه است؛ به عنوان مثال، اگر احتمال مدارات چاپی معیوب با روش تجربی 0.10 برآورد شود، در این صورت احتمال مدارات چاپی سالم 0.90 خواهد بود و یا فرض کنید، سازنده‌ی یک قطعه فلزی با اندازه‌گیری‌های زیادی برآورد کند که احتمال این‌ها طول آن‌ها خیلی کوتاه باشند 0.2 و احتمال این‌ها که طول آن‌ها خیلی بلند باشند 0.3 است، در آن صورت احتمال این‌که قطعات دارای طولی که جزء ویژگی‌های آن نمی‌باشد، 0.5 است.

اصول موضوعه احتمال

علم احتمال بر سه اصل استوار است.

(۱) اگر S فضای نمونه باشد در آن صورت $P(S)=1$

(۲) برای هر پیشامدی مانند A : $0 \leq P(A) \leq 1$

(۳) اگر A و B پیشامدهای دو به دو ناسازگاری باشند در آن صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B)$$

به طور کلی اگر $A_1, A_2, \dots$ پیشامدهای دو به دو ناسازگاری باشند در آن صورت:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

اولین اصل می‌گوید که خروجی هر آزمایش همیشه در فضای نمونه قرار دارد به دلیل آن که فضای نمونه شامل همه خروجی‌های ممکن آزمایش است. اصل دوم می‌گوید که احتمال هر پیشامدی بین صفر و صد در صد قرار دارد. برای سومین اصل؛ به عنوان مثال، نشان دادیم که در مثال سازنده‌ی قطعات استوانه‌ای فلزی اگر احتمال این که استوانه‌ها خیلی کوتاه باشند $0/02$ و احتمال این که قطعات خیلی بلند باشند $0/03$ بر اساس اصل سوم احتمال اینکه هم کوتاه و هم بلند باشند $0/05$ است. دو قانون ساده و مهم در محاسبات احتمالات عبارتند از:

$$P(A^c) = 1 - P(A) \quad \text{برای هر پیشامد } A$$

$$P(\phi) = 0 \quad \text{اگر } \phi \text{ مجموعه تهی باشد}$$

بر اساس اولین قانون، احتمال این که پیشامدی رخ ندهد برابر است با یک منهای احتمال این که رخ دهد. به عنوان مثال، اگر 40% شانس باریدن باران باشد 60% احتمال نباریدن آن است. ضمناً بر اساس قانون دوم غیرممکن است که آزمایش برآمدی نداشته باشد.

جدول زیر احتمال تعداد دفعاتی را که برای کامپیوتری ممکن است اتفاقی رخ دهد نشان می‌دهد. اگر A پیشامدی باشد که بیش از ۳ بار برای کامپیوتر اتفاق بیفتد و B پیشامدی باشد که حداقل یک بار اتفاقی برای کامپیوتر روی دهد، مطلوب است محاسبه فضای نمونه و زیر مجموعه‌ای از فضای نمونه شامل پیشامدهای A و B و همچنین $P(A)$ و $P(B)$.

احتمال	تعداد اتفاقات
$0/60$	۰
$0/30$	۱
$0/05$	۲
$0/04$	۳
$0/01$	۴

$$S = \{0, 1, 2, 3, 4\}$$

$$A = \{3, 4\}, B = \{1, 2, 3, 4\}$$

بر اساس اصل سوم:

$P(A) = P$ (احتمال اینکه ۳ اتفاق رخ دهد یا ۴ اتفاق رخ دهد)

$$= P(4 \text{ اتفاق رخ دهد}) + P(3 \text{ اتفاق رخ دهد})$$

$$= 0.04 + 0.01 = 0.05$$

روش اول:

$P(B) = 1 - P(B^c) = 1 - P$ (احتمال این که صفر اتفاق رخ دهد)

$$= 1 - 0.60 = 0.40$$

روش دوم:

$P(B) = P$ (سه اتفاق) + P (دو اتفاق) + P (یک اتفاق)

$$+ P(4 \text{ اتفاق}) = 0.30 + 0.05 + 0.04 + 0.01$$

$$= 0.40$$

نتیجه‌گیری:

اگر $A = \{E_1, E_2, \dots, E_n\}$ یک پیشامد باشد به طوری که

در آن صورت:

$$P(A) = P(E_1) + P(E_2) + \dots + P(E_n)$$

فضای نمونه با برآمدهایی با احتمال برابر

فضای نمونه می‌تواند شامل برآمدهایی با احتمال برابر باشد مانند؛ ریختن یک تاس که در آن

فضای نمونه مجموعه $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ است و احتمال هر یک برابر می‌باشد و یا آزمایشی که نتایج

آن شبیه انتخاب تصادفی آیتمی از جامعه آیتم‌ها باشد.

بنابراین، جامعه‌ای را که به صورت تصادفی می‌توانند نمونه‌گیری شوند، می‌توان فضای نمونه‌ای

با خروجی‌های مشابه در نظر گرفت.

اگر فضای نمونه‌ای شامل N برآمد مشابه باشد احتمال هر برآمد $1/N$ است (با توجه به این که مجموع احتمالات فضای نمونه یک است) اگر A پیشامدی با K برآمد باشد در این صورت $P(A)$ را می‌توان با جمع احتمالات K برآمد محاسبه نمود بنابراین:

$$P(A) = \frac{K}{N}$$

مثال: برای تولید قطعات استوانه‌ای آلومینیومی از دستگاه اکستروژن استفاده می‌شود. مشخصات طول و قطر هر قطعه‌ای را در دو گروه، خیلی کوتاه، خیلی بلند، قابل قبول و خیلی نازک، خیلی ضخیم، قابل قبول تقسیم می‌شود. برای یک جامعه هزارتایی نتایج به صورت زیر می‌باشد.

قطر			طول
خیلی ضخیم	قابل قبول	خیلی نازک	
۵	۳	۱۰	خیلی کوتاه
۴	۹۰۰	۳۸	قابل قبول
۱۳	۲۵	۲	خیلی بلند

نمونه‌ای را به صورت تصادفی انتخاب می‌کنیم. احتمال اینکه خیلی کوتاه باشد چقدر است؟ پاسخ: تعداد قطعاتی که خیلی کوتاه هستند:

$$۱۰+۳+۵=۱۸$$

$$P(\text{خیلی کوتاه}) = \frac{۱۸}{۱۰۰۰}$$

اگر A و B پیشامدهای دو به دو ناسازگار باشند در این صورت:

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

مثال: در مثال فوق اگر نمونه‌ای به صورت تصادفی انتخاب شود مطلوب است محاسبه احتمال اینکه خیلی کوتاه و یا خیلی ضخیم باشد.

$$10+3+5+4+13=35$$

$$P(\text{خیلی کوتاه یا خیلی ضخیم باشد}) = \frac{35}{100}$$

حال مثال را از روش دیگری حل می‌کنیم. در فضای نمونه تعداد $10+3+5=18$ نمونه وجود دارد که خیلی کوتاه و $4+5+13=22$ نمونه وجود دارد که خیلی ضخیم است.

$$P(\text{خیلی کوتاه}) = \frac{18}{100}$$

$$P(\text{خیلی ضخیم}) = \frac{22}{100}$$

$$P(\text{خیلی کوتاه و خیلی ضخیم}) = \frac{5}{100}$$

$$P(\text{خیلی کوتاه یا خیلی ضخیم}) = \frac{18}{100} + \frac{22}{100} - \frac{5}{100} = \frac{35}{100}$$

مثال: در فرآید تولید قوطی‌های آلومینیومی، احتمال این که نقصی در داخل یک قوطی باشد 0.02 ، احتمال این که در روی آن نقصی باشد 0.03 و احتمال این که نقصی در داخل و روی آن وجود داشته باشد 0.01 است. اگر نمونه‌ای به صورت تصادفی انتخاب شود، مطلوب است محاسبه احتمال این که نمونه بدون نقص باشد.

$$P_1(\text{نقص در داخل}) = 0.02$$

$$P_2(\text{نقص در روی نمونه}) = 0.03$$

$$P_3(\text{نقص در داخل و در روی نمونه}) = 0.01$$

$$P'(\text{نقص در داخل یا روی سطح نمونه}) = P_1 + P_2 - P_3 = 0.02 + 0.03 - 0.01 = 0.04$$

$$p(\text{بدون نقص}) = 1 - P' = 1 - 0.04 = 0.96$$

احتمال شرطی و استقلال

یک فضای نمونه شامل کلیه برآمدهای ممکن هر آزمایشی است. گاهی اوقات اطلاعاتی اضافی از آزمایش به دست می‌آوریم که نشان می‌دهند که برآمدها از بخش مشخصی از فضای نمونه به دست آمده‌اند. در این حالت احتمال هر پیشامدی بر اساس برآمدهای آن بخش از فضای نمونه است. احتمالی که بر اساس بخشی از فضای نمونه باشد "احتمال شرطی" خوانده می‌شود. در مثال مربوط به قطعات استوانه‌ای آلومینومی از یک جامعه ۱۰۰۰ تایی صحبت کردیم. طول و قطر هر قطعه به سه بخش تقسیم شد. مطابق جدول، ۹۲۸ عدد از نمونه‌ها قابل قبول بودند بنابراین اگر یک نمونه انتخاب شود احتمال این که قطر آن قابل قبول باشد $\frac{928}{1000} = 0.928$ است. به این احتمال که بر اساس کل فضای نمونه محاسبه شده است. "احتمال غیر شرطی" گفته می‌شود. حال فرض کنید که نمونه‌ای گرفته شده است و طول آن اندازه‌گیری شده و ویژگی‌های مورد نظر را داراست. احتمال این که این نمونه از نظر قطر نیز قابل قبول باشد، چقدر است؟ کلید محاسبه این احتمال در این است که قابل قبول بودن طول نمونه سبب کاهش فضای نمونه می‌گردد. در جدول زیر این موضوع مشاهده می‌شود.

طول	قطر		
	خیلی نازک	قابل قبول	خیلی ضخیم
خیلی کوتاه	-	-	-
قابل قبول	۳۸	۹۰۰	۴
خیلی بلند	-	-	-

در این فضای نمونه ۹۴۲ نمونه وجود دارد که قطر ۹۰۰ عدد از آن‌ها قابل قبولند. با توجه به این که طول نمونه‌ها قابل قبولند، احتمال این که قطر آن‌ها مورد قبول باشد، $900/942$ است که به آن احتمال شرطی گفته می‌شود و بدین صورت نوشته می‌شود:

$$P(\text{طول قابل قبول} | \text{قطر قابل قبول}) = 900/942 = 0.955$$

مثال: مطلوب است محاسبه احتمال شرطی (طول خیلی بلند | قطر مورد قبول) P . آیا این احتمال با احتمال غیرشرطی (قطر قابل قبول) P یکسان است؟

پاسخ: این احتمال شرطی با فرض این که قطعه خیلی بلند است محاسبه می‌شود؛ یعنی، فضای نمونه به $۲+۲۵+۱۳=۴۰$ تقلیل می‌یابد. پس قطر ۲۵ قابل قبول است:

$$P(\text{طول خیلی بلند} \mid \text{قطر قابل قبول}) = \frac{۲۵}{۴۰} = ۰/۶۲۵$$

احتمال غیرشرطی (قطر قابل قبول) P بر اساس فضای نمونه ۱۰۰۰ تایی محاسبه می‌گردد که برابر است با $۰/۹۲۸ = \frac{۹۲۸}{۱۰۰۰}$ ، بنابراین احتمال غیرشرطی با احتمال شرطی فرق می‌کند. به طور کلی اگر A و B دو پیشامد باشد و $P(B) \neq 0$ ، احتمال شرطی برابر است با:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

پیشامدهای مستقل

هر گاه بدانیم که روی دادن یک پیشامد، احتمال رخ دادن پیشامد دیگری را تغییر ندهد، در آن صورت احتمالات شرطی و غیرشرطی یکسانند و پیشامدها را مستقل می‌نامند. مثال: اگر یک قطعه آلومینیومی نمونه‌برداری شود، مطلوب است محاسبه (خیلی بلند) P و (خیلی نازک | خیلی بلند) P . آیا این احتمالات با هم فرق می‌کنند؟

$$P(\text{خیلی بلند}) = \frac{۴۰}{۱۰۰۰} = ۰/۰۴۰$$

$$P(\text{خیلی نازک و خیلی بلند}) = \frac{۰/۰۰۲}{P(\text{خیلی نازک})} = \frac{۰/۰۰۲}{۰/۰۵۰} = ۰/۰۴۰$$

مقادیر احتمال شرطی و احتمال غیرشرطی برابرند. اطلاعات مربوط به قطعه خیلی نازک را، احتمال این که قطعه خیلی بلند است، تغییر نمی‌دهد.

دو پیشامد A و B مستقل هستند هر گاه احتمال هر پیشامد با رخ دادن دیگری ثابت بماند:

$$P(A \mid B) = P(A) \text{ یا } P(A \mid B) = P(A), P(B) \neq 0, P(A) \neq 0$$

حتی اگر $P(A) = 0$ و $P(B) = 0$ ، A و B مستقلند.

اگر A و B مستقل باشند در این صورت A و B^c ، A^c و B ، A^c و B^c مستقل هستند. به عبارت

دیگر:

پیشامدهای $A_1, A_2, \dots, A_n$ مستقل هستند. هر گاه برای هر A_i و هر مجموعه‌ای از پیشامدها

$P(A_{j_1} \cap \dots \cap A_{j_m}) \neq 0$ با $A_{j_1}, \dots, A_{j_m}$

$$P(A_i) = A_{j_m} \cap \dots \cap A_{j_2} \cap A_{j_1} \mid (A_i \text{ P})$$

قانون ضرب

گاهی اوقات $P(A|B)$ معلوم است و می‌خواهیم $P(A \cap B)$ را بدانیم. برای به دست آوردن آن قانون سودمندی در اختیار داریم.

اگر A و B دو پیشامد مستقل با $P(B) \neq 0$ باشد:

$$P(A \cap B) = P(B).P(A|B)$$

اگر A و B دو پیشامد مستقل با $P(A) \neq 0$ باشد:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B|A)$$

اگر $P(A) \neq 0$ و $P(B) \neq 0$ باشد، هر دو رابطه فوق برقرار است.

چنانچه دو پیشامد مستقل از هم باشند در آن صورت:

$$P(A|B) = P(A), P(B|A) = P(B) \text{ و قانون ضرب ساده می‌شود.}$$

اگر A و B پیشامدهای مستقل از هم باشند در آن صورت:

$$P(A \cap B) = P(A).P(B)$$

این نتیجه را می‌توان به هر تعداد پیشامد نیز تعمیم داد. اگر $A_1, A_2, \dots, A_n$ پیشامدهای

مستقل باشند برای هر انتخابی از پیشامدهای $A_{j_1}, \dots, A_{j_m}$:

$$P(A_{j_1} \cap A_{j_2} \cap \dots \cap A_{j_m}) = P(A_{j_1}) P(A_{j_2}) \dots P(A_{j_m})$$

مثال - کامیونی دو موتور دارد، موتور اصلی و موتور پشتیبان. اجزاء موتور وقتی فقط هر دو

موتور کار نکنند از کار می‌افتند. احتمال این که موتور اصلی از کار بیفتد 0.05 و احتمال این که

موتور پشتیبان از کار افتد 0.10 است. فرض کنید که عملکرد موتور اصلی و پشتیبان مستقل از هم

هستند. احتمال این که اجزاء موتور از کار بیفتد چقدر است؟

(موتور اصلی و موتور پشتیبان از کار بیفتد) $P =$ (از کار افتادن اجزاء موتور) P

از کار افتادن موتور پشتیبان) P . (از کار افتادن موتور اصلی) $P =$ (از کار افتادن اجزاء موتور) P

$$= (0.10)(0.05) = 0.005$$

مثال: سیستمی از دو مؤلفه‌ی A و B تشکیل شده است. سیستم وقتی کار می‌کند که هر دو مؤلفه عمل کند. احتمال این که A و B کار نکنند به ترتیب ۰/۰۸ و ۰/۰۵ است. با فرض مستقل بودن مؤلفه‌های A و B احتمال این که سیستم کار کند، چقدر است؟

$P(A \text{ و } B \text{ عمل کند}) = P(\text{عملکرد سیستم})$

$P(B \text{ عمل کند}) \cdot P(A \text{ عمل کند}) = P(A \text{ و } B \text{ عمل کند})$

$$= [1 - P(B \text{ عمل نکند})] [1 - P(A \text{ عمل نکند})]$$

$$= [1 - 0.08][1 - 0.05] = 0.872$$

مثال: در فرآیند تولید ریز پردازنده‌هایی ۲۰٪ احتمال خرابی وجود دارد. ۵ ریزپردازنده به صورت تصادفی انتخاب می‌شود. با فرض این که عملکرد ریزپردازنده‌ها مستقل‌اند، مطلوب است محاسبه‌ی احتمال عملکرد آن‌ها.

$$\begin{aligned} P(\text{هر ۵ تا کار کنند}) &= P(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4 \cap A_5) \\ &= P(A_1)P(A_2)P(A_3)P(A_4)P(A_5) \\ &= (1 - 0.20)^5 = 0.328 \end{aligned}$$

مثال: در مثال فوق مطلوب است محاسبه‌ی احتمال این که حداقل یکی از ریز پردازنده‌ها کار کند.

$P(\text{همه کار نکنند}) = 1 - P(\text{حداقل یکی کار کند})$

$$P(D_1 \cap D_2 \cap D_3 \cap D_4 \cap D_5) = P(\text{همه کار نکنند})$$

$$= P(D_1) \cdot P(D_2) \cdot P(D_3) \cdot P(D_4) \cdot P(D_5)$$

$$= (0.020)^5 = 0.0003$$

$$P(\text{حداقل یکی کار کند}) = 1 - 0.0003 = 0.9997$$

دو رابطه مربوط به قانون ضربها، چگونگی محاسبه احتمالات را نشان می‌دهند. علی‌رغم این که می‌دانیم پیشامدها مستقل‌اند؛ اما در حصول اطمینان از این که پیشامدها واقعاً مستقل‌اند، کمک زیادی نمی‌کنند. بهترین روش برای تعیین این که پیشامدها مستقل‌اند، درک درست از فرآیند ایجاد پیشامدها است.

قانون احتمال کل

اگر $A_1, \dots, A_n$ دو به دو مستقل از هم و پیشامدهای جامع^۱ (فراگیر) باشند و B یک پیشامد باشد در این صورت:

$$P(B) = P(A \cap B) + \dots + P(A_n \cap B)$$

متشابهاً $P(A_i) \neq 0$ باشد برای هر A_i :

$$P(B) = P(B | A_1)P(A_1) + \dots + P(B | A_n)P(A_n)$$

مثال: مشتریان یک تولیدکننده خودرو می‌توانند خودرویی با سه موتور مختلف خریداری نمایند. اگر همه خودروها فروخته شود به طوری که ۴۵٪ با موتور کوچک، ۳۵٪ با موتور متوسط و ۲۰٪ با موتور بزرگ. اگر ۱۰٪ خودروها با موتور کوچک ۱۲٪ با موتور متوسط و ۱۵٪ با موتور بزرگ در آزمون انتشار گازهای آلاینده طی مدت زمان ۲ سال پس از خرید مردود شوند، احتمال این که با انتخاب تصادفی خودرویی در این آزمون مردود شود، چقدر است؟

فرض کنید که B پیشامد مردودی خودرویی طی این آزمون باشد و A_1, A_2, A_3 پیشامد مربوط به خودرو با موتورهای کوچک، متوسط و بزرگ باشند در این صورت:

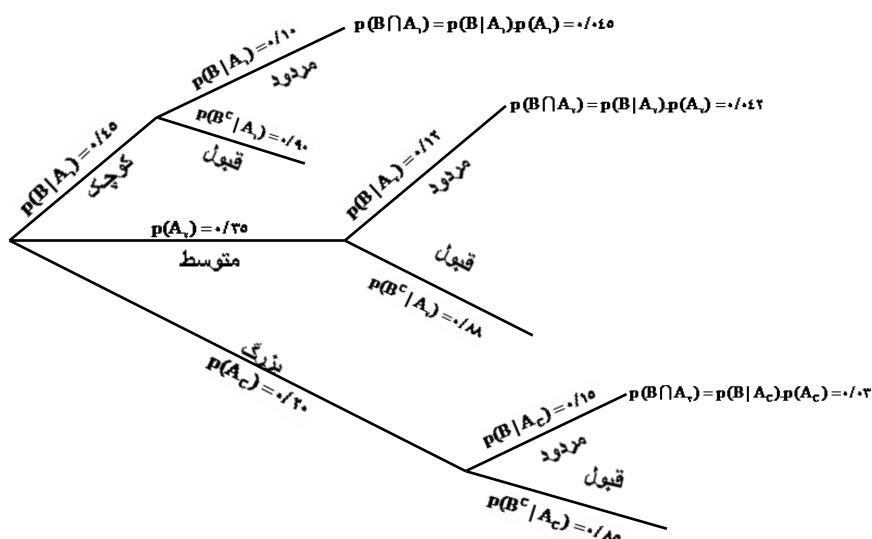
$$P(A_1) = 0.45, P(A_2) = 0.35, P(A_3) = 0.20$$

احتمال این که خودرویی در این آزمون مردود شود برای موتور کوچک ۱۰٪ است و $P(B|A_1) = 0.10$ به همین منوال $P(B|A_2) = 0.12$ و $P(B|A_3) = 0.15$ با توجه به قانون احتمال کل:

$$\begin{aligned} P(B) &= P(B | A_1)P(A_1) + P(B | A_2)P(A_2) + P(B | A_3)P(A_3) \\ &= (0.10)(0.45) + (0.12)(0.35) + (0.15)(0.20) = 0.117 \end{aligned}$$

1- Exhaustive

مسئله را می‌توان به روش زیر نیز حل کرد.



متغیرهای تصادفی

در اغلب موارد لازم است که در آزمایش‌ها به هر برآمدی، عددی نسبت دهیم؛ به چنین عددی "متغیر تصادفی" گفته می‌شود. برای این که مطلب واضح‌تر شود به ارایه مثالی می‌پردازیم. فرض کنید یک مهندس الکترونیک ۶ مقاومت در دست دارد سه عدد از آن‌ها ۱۰۰ اهمی و ۳ عدد دیگر ۲۰ اهمی‌اند. او می‌خواهد با سری کردن دو مقاومت، یک مقاومت ۳۰ اهمی بسازد. فرض کنید که مقاومت واقعی مقاومت‌های ده اهمی، ۹، ۱۰ و ۱۱ اهم و مقاومت‌های ۲۰ اهمی، ۱۹، ۲۰ و ۲۱ اهم باشند. فرایند انتخاب یک مقاومت از هر نوع یک آزمایش است. در این صورت فضای نمونه آزمایش از ۹ برآمد مشابه تشکیل شده است.

برآمد	احتمال
(۹، ۱۹)	۱/۹
(۲۰، ۹)	۱/۹
(۲۱، ۹)	۱/۹
(۱۹، ۱۰)	۱/۹
(۲۰، ۱۰)	۱/۹
(۲۱، ۱۰)	۱/۹
(۱۹، ۱۱)	۱/۹
(۲۰، ۱۱)	۱/۹
(۲۱، ۱۱)	۱/۹

برای مهندس الکترونیک مجموع دو مقاومت از مقدار تک تک آن‌ها مهم‌تر است. بنابراین به هر برآمدی عددی نسبت می‌دهیم که همان مجموع دو مقاومت است و آن را با X نشان می‌دهیم.

احتمال	X	برآمد
$1/9$	۲۸	(۹،۱۹)
$1/9$	۲۹	(۲۰،۹)
$1/9$	۳۰	(۲۱،۹)
$1/9$	۲۹	(۱۹،۱۰)
$1/9$	۳۰	(۲۰،۱۰)
$1/9$	۳۱	(۲۱،۱۰)
$1/9$	۳۰	(۱۹،۱۱)
$1/9$	۳۱	(۲۰،۱۱)
$1/9$	۳۲	(۲۱،۱۱)

تابع X که به هر برآمدی در فضای نمونه عددی نسبت می‌دهد متغیر تصادفی گفته می‌شود. بنابراین یک متغیر تصادفی به هر برآمدی در فضای نمونه، عددی نسبت می‌دهد.

می‌توان احتمال متغیرهای تصادفی را محاسبه نمود در مثال ارایه شده پیشامد $X=29$ مطابق با پیشامدهای $\{(20,9), (10,19)\}$ فضای نمونه است. بنابراین:

$$P(X=29) = P\{(20,9), (10,19)\} = \frac{2}{9}$$

مثال: در مثال فوق فهرست مقادیر ممکن متغیر تصادفی X و احتمال هر یک را تهیه کنید.

X	$P(X=x)$
۲۸	$1/9$
۲۹	$2/9$
۳۰	$3/9$
۳۱	$2/9$
۳۲	$1/9$

این جدول شامل همه‌ی اطلاعات مورد نیاز برای محاسبه احتمال متغیر تصادفی X است. توجه داشته باشید که برآمدهای فضای نمونه در این جدول درج نشده‌اند. زمانی که احتمال متغیرهای تصادفی معلوم باشد، معمولاً به فضای نمونه توجهی نمی‌شود فقط باید روی احتمالات تمرکز کرد. متغیرهای تصادفی دو نوع هستند: گسسته و پیوسته. روش کار با این متغیرها فرق می‌کند. مقدار یک متغیر تصادفی گسسته به صورت گسسته تغییر می‌کند، یعنی اگر مقادیر ممکن را به

صورت صعودی یا نزولی مرتب کنیم، مابین هر مقدار و مقدار بعدی فاصله‌ای وجود دارد. مجموعه مقادیر ممکن می‌تواند نامحدود باشد؛ به عنوان مثال، مجموعه‌ای اعداد صحیح و یا همه اعداد صحیح مثبت.

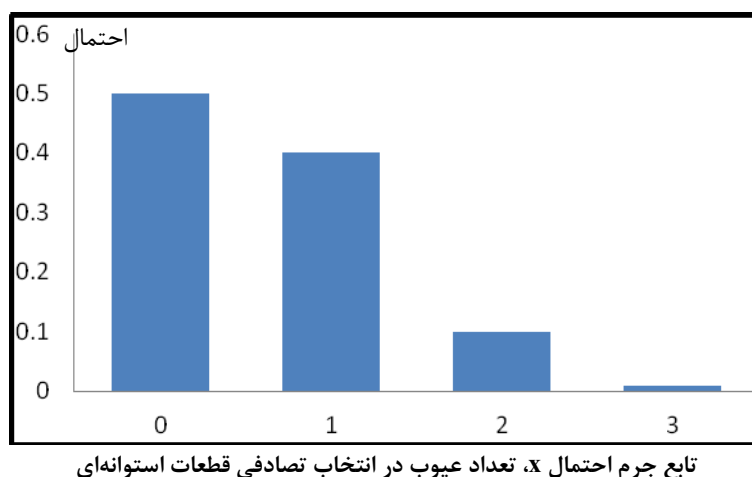
فهرست مقادیر ممکن به همراه احتمال هر یک، توصیف کاملی از جامعه‌ی آماری ارائه می‌دهد. نام این توصیف "تابع جرم احتمال"^۱ گفته می‌شود. این تابع برای متغیر تصادفی X تابع $P(X)=P(X=x)$ است. این تابع را "توزیع احتمال" نیز می‌نامند.

فرض کنید سازنده‌ای قطعه‌های استوانه‌ای به طول ۲/۵ cm از مس تولید می‌نماید. ۴۸٪ این استوانه‌ها سالم، ۳۹٪ یک نقص، ۱۲٪ دو نقص و ۱٪ آن‌ها ۳ نقص دارد. اگر X تعداد نقص‌های قطعاتی باشد که به صورت تصادفی نمونه‌برداری شده باشند:

$$P(X=0)=0/48, P(X=1)=0/39$$

$$P(X=2)=0/12, P(X=3)=0/01$$

توجه داشته باشید که مجموع مقادیر تابع جرم احتمال برای کل مقادیر ممکن X برابر ۱ است. این تابع را می‌توان به صورت گرافیکی نیز نمایش داد، به طوری که محور y نشانگر مقادیر ممکن متغیر تصادفی و ارتفاع خطوط برابر احتمال هر مقدار باشد. تعبیر فیزیکی این منحنی این است که هر خط نشان‌دهنده جرمی معادل ارتفاع خود است.



1- Function probability mass

تابع توزیع انباشته متغیر تصادفی گسسته

تابع جرم احتمال، احتمالی را معین می‌نماید که متغیر تصادفی مقدار مشخصی، اختیار می‌کند. تابعی که تابع توزیع انباشته خوانده می‌شود؛ احتمالی را معین می‌کند که متغیر تصادفی مقداری کمتر یا مساوی مقدار مشخصی دارد. این تابع بدین صورت است:

$$F(x) = P(X \leq x)$$

مثال: از آنجایی که $F(2) = P(X \leq 2)$ است. برای محاسبه‌ی $P(X \leq 2)$ ، مجموع احتمالات مقادیر X را - که کمتر یا مساوی ۲؛ یعنی، ۰ و ۱ و ۲ است - محاسبه می‌کنیم.

$$F(2) = P(X \leq 2)$$

$$= P(X=0) + P(X=1) + P(X=2)$$

$$= 0/0 + 48/0 + 39/12 = 0/99$$

همچنین:

$$F(1.5) = P(X=0) + P(X=1)$$

به طور کلی برای متغیر تصادفی X تابع توزیع انباشته $F(x)$ به صورت مجموع احتمالات تمام مقادیر ممکن X که کمتر یا مساوی x است، محاسبه می‌گردد. توجه داشته باشید که $F(x)$ نه فقط برای مقادیر ممکن X بلکه برای هر مقدار x تعریف می‌شود.

میانگین و واریانس متغیرهای تصادفی گسسته

اگر X یک متغیر تصادفی گسسته با تابع جرم احتمال $P(x)=P(X=x)$ باشد، میانگین X با رابطه‌ی زیر نشان داده می‌شود.

$$\mu_X = \sum_x xP(X=x)$$

که $\sum$ شامل همه مقادیر ممکن X است. میانگین X گاهی اوقات امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار X گفته می‌شود و به صورت $E(X)$ یا μ نشان داده می‌شود. واریانس X برابر است با:

$$\sigma_x^2 = \sum_x (x - \mu_x)^2 P(X=x)$$

و یا

$$\sigma_x^2 = \sum_x x^2 P(X=x) - \mu_x^2$$

واریانس X به صورت $\text{var}(x)$ یا $V(x)$ و یا σ^2 نشان داده می‌شود.

انحراف معیار برابر است با:

$$\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$$

بافت نگار یا هیستوگرام احتمال

وقتی که مقادیر ممکن متغیر تصادفی گسسته به طور یکنواخت از هم فاصله داشته باشند تابع جرم احتمال را می‌توان به صورت هیستوگرام با مستطیل‌هایی که مقادیر متغیر تصادفی در مرکز آن قرار دارند، نمایش داد. مساحت مستطیلی که مرکز آن در X قرار دارد برابر است با $P(X=x)$. این هیستوگرام را برای این که مساحت، احتمال را نشان می‌دهد، هیستوگرام احتمال می‌نامند. احتمال این که مقدار یک متغیر تصادفی در گستره‌ی داده شده قرار بگیرد برابر با مساحت هیستوگرام احتمال است.

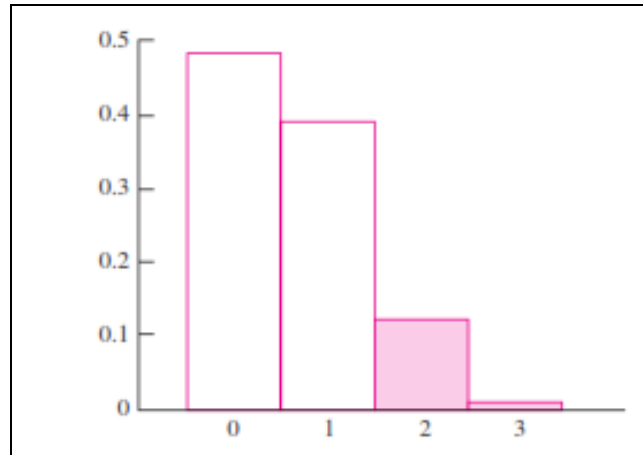
مثال: مطلوب است محاسبه‌ی انتخاب تصادفی قطعه‌ای که بیش از یک نقص داشته باشد. این احتمال را به صورت مساحت هیستوگرام احتمال بیان کنید.

پاسخ: این احتمال به صورت مساحت زیر منحنی هیستوگرام احتمال، مطابق با مستطیل‌هایی با مقادیر مرکزی بزرگتر از ۱ می‌باشد که شامل ۲ مستطیل با سطوح زیر می‌شود:

$$P(X=2)=0/12, \quad P(X=3)=0/01$$

و یا:

$$P(X>1)=0/12 + 0/01=0/13$$



هیستوگرام متغیر X : یعنی، تعداد نقص‌ها در انتخاب تصادفی قطعات.

سطوح سایه‌دار برابر است با $P(X > 1)$

متغیرهای تصادفی پیوسته

یک متغیر پیوسته، متغیری است که احتمالات آن به صورت مساحت زیر منحنی نمایش داده می‌شود. این منحنی را تابع چگالی احتمال^۱ می‌نامند. از آن جایی که تابع چگالی احتمال پیوسته است، محاسبات مربوط به احتمالات به جای $\sum$ شامل انتگرال است. تابع چگالی احتمال گاهی "توزیع احتمال" نامیده می‌شود.

محاسبه احتمالات با استفاده از تابع چگالی احتمال

فرض کنید X یک متغیر تصادفی پیوسته، $F(x)$ تابع چگالی احتمال و a و b دو عدد باشند و $a < b$ آن بخش از جامعه آماری که مقدار X آن بین a و b قرار دارد به صورت $\int_a^b f(X) dx$ داده می‌شود و با مساحت زیر منحنی تابع چگالی احتمال بین a و b برابر است.

$$P(a \leq X \leq b) = P(a \leq X < b) = P(a < X \leq b) = P(a < X < b) = \int_a^b f(X) dx$$

ضمناً:

$$P(X \leq a) = P(X < a) = \int_{-\infty}^a f(X) dx$$

$$P(X \geq a) = P(X > a) = \int_a^{\infty} f(X) dx$$

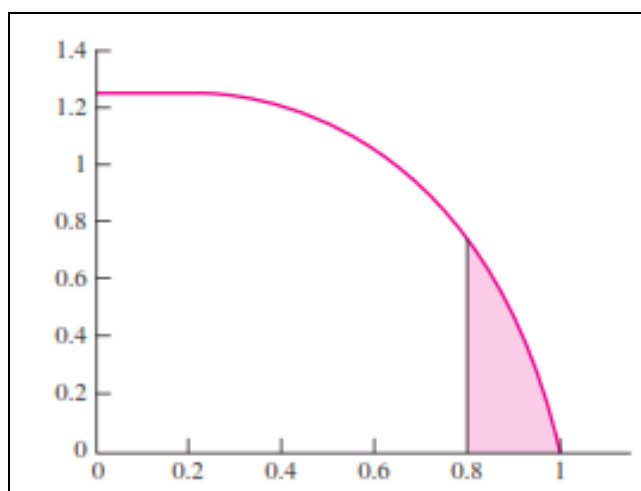
1- Probability density function

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(X) dx = 1$$

مثال: در یک صفحه فلزی حفره‌ای را ایجاد و شفتی را از آن عبور می‌دهیم. لقی شفت برابر است با اختلاف بین شعاع حفره و شعاع شفت. اگر متغیر تصادفی X نشان دهنده‌ی لقی برحسب میلی‌متر باشد، تابع چگالی احتمال X برابر است با:

$$f(X) = \begin{cases} 1.25(1 - X^4) & 0 < X < 1 \\ 0 & \text{سایر موارد} \end{cases}$$

قطعات با لقی بزرگتر از ۰٫۸ mm باید مردود شوند. چه بخشی از قطعات مردود می‌شوند؟



تابع چگالی احتمال لقی شفت، سطح زیر منحنی سایه‌دار برابر است با $P(X > 0.8)$

مطابق شکل چگالی $f(X)$ برای $X \leq 0$ و $X \geq 1$ صفر است. این نشان‌دهنده‌ی آن است که لقی همیشه بین صفر و ۱ میلی‌متر است. قطعاتی باید مردود شوند که $P(X \geq 0.8)$ باشد که مقدار آن برابر است با سطح زیر تابع چگالی احتمال از ۰٫۸ تا ۱

$$\begin{aligned} P(X > 0.8) &= \int_{0.8}^{\infty} f(X) dx = \int_{0.8}^1 1.25(1 - X^4) dx \\ &= 1.25 \left(x - \frac{X^5}{5} \right) \bigg|_{0.8}^1 = 0.0819 \end{aligned}$$

تابع توزیع انباشته یک متغیر تصادفی پیوسته

تابع توزیع انباشته یک متغیر تصادفی پیوسته X برابر است با $F(X) = P(X \leq x)$. برای یک متغیر تصادفی گسسته، $F(X)$ را می‌توان با جمع مقادیر تابع جرم احتمال به دست آورد. برای یک متغیر تصادفی پیوسته مقدار $F(X)$ از طریق انتگرال تابع توزیع احتمال قابل حصول است.

$$F(X) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^X f(t) dt$$

$F(t)$ تابع چگالی احتمال است.

مثال: در مثال قبل مطلوب است محاسبه تابع توزیع انباشته $F(X)$ و رسم آن.

تابع توزیع احتمال برابر است با:

$$F(t) = 0 \quad t \leq 0$$

$$F(t) = 1.25(1 - t^4) \quad 0 < t < 1$$

$$F(t) = 0 \quad t \geq 1$$

تابع توزیع انباشته عبارت است از:

$$F(X) = \int_{-\infty}^X F(t) dt = \int_{-\infty}^X 0 dt = 0 \quad X \leq 0$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^X F(t) dt = \int_{-\infty}^0 F(t) dt + \int_0^X F(t) dt \quad 0 < X < 1$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^X 1.25(1 - t^4) dt = 0 + 1.25 \left(t - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^X$$

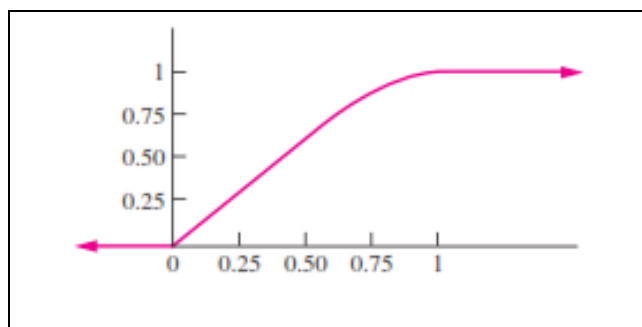
$$F(X) = 1.25 \left(X - \frac{X^5}{5} \right)$$

$$F(X) = \int_{-\infty}^X F(t) dt = \int_{-\infty}^0 F(t) dt + \int_0^1 F(t) dt + \int_1^X F(t) dt \quad X > 1$$

$$= \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 1.25(1 - t^4) dt + \int_1^X 0 dt$$

$$= 0 + 1.25 \left(t - \frac{t^5}{5} \right) \Big|_0^1 + 0 = 0 + 1 + 0 = 1$$

$$F(X) = \begin{cases} 0 & X \leq 0 \\ 1.25 \left(X - \frac{X^5}{5} \right) & 0 < X < 1 \\ 1 & X \geq 1 \end{cases}$$



تابع توزیع انباشته در این مثال یک تابع پیوسته است (هیچ پرشی در منحنی وجود ندارد) این از ویژگی‌های متغیرهای تصادفی پیوسته است در حالی که تابع توزیع انباشته، یک متغیر تصادفی گسسته هرگز پیوسته نخواهد بود. اگر بخواهیم با استفاده از تابع توزیع انباشته، احتمال این که لقی شفت کمتر از ۰/۵ میلی‌متر را بیابیم- با فرض اینکه X همان لقی باشد- باید $P(X \leq 0.5)$ را بیابیم که این معادل آن است که $F(0.5)$ را محاسبه کنیم:

$$F(0.5) = 1.25 \left((0.50) \frac{0.5^5}{5} \right) = 0.617$$

میانگین واریانس متغیرهای تصادفی پیوسته

اگر X یک متغیر تصادفی پیوسته با تابع چگالی احتمال $f(x)$ باشد، میانگین X به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$$

به میانگین X مقدار مورد انتظار و یا امید ریاضی گفته می‌شود و به صورت μ یا $E(x)$ نشان داده می‌شود.

واریانس x برابر است با:

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

و یا

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_x^2$$

انحراف معیار برابر است با $\sigma_x = \sqrt{\sigma_x^2}$

در مثال قبل:

$$\mu_x = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} x [1.25(1-x^4)] dx$$

$$= 1.25 \left(\frac{X^2}{2} - \frac{X^6}{6} \right) \Big|_0^1 = 0.4167$$

$$\sigma_x^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx - \mu_x^2$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 [1.25(1-x^4)] dx - (0.4167)^2$$

$$= 1.25 \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^7}{7} \right) \Big|_0^1 - (0.4167)^2 = 0.0645$$

تابع خطی متغیرهای تصادفی

اگر x یک متغیر تصادفی و a و b مقادیر ثابت باشد در این صورت:

$$\begin{cases} \mu_{x+b} = \mu_x + b \\ \sigma_{x+b}^2 = \sigma_x^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \mu_{ax} = a\mu_x \\ \sigma_{ax}^2 = a^2\sigma_x^2 \end{cases}, \quad \sigma_{ax} = |a|\sigma_x$$

$$\begin{cases} \mu_{ax+b} = a\mu_x + b \\ \sigma_{ax+b}^2 = a^2\sigma_x^2 \\ \sigma_{ax+b} = |a|\sigma_x \end{cases}$$

اگر $x_1, x_2, \dots, x_n$ متغیرهای تصادفی باشند، میانگین مجموع $x_1 + x_2 + \dots + x_n$ برابر است با:

$$\mu_{x_1+x_2+\dots+x_n} = \mu_{x_1} + \mu_{x_2} + \dots + \mu_{x_n}$$

اگر x و y متغیرهای تصادفی و a و b ثابت باشند در این صورت:

$$\mu_{ax+by} = \mu_{ax} + \mu_{by} = a\mu_x + b\mu_y$$

به طور کلی:

$$\mu_{C_1x_1} + \mu_{C_2x_2} + \dots + \mu_{C_nx_n} = C_1\mu_{x_1} + C_2\mu_{x_2} + \dots + C_n\mu_{x_n}$$

$$\sigma_{x_1+x_2+\dots+x_n}^2 = \sigma_{x_1}^2 + \sigma_{x_2}^2 + \dots + \sigma_{x_n}^2$$

$$\sigma_{C_1x_1+C_2x_2+\dots+C_nx_n}^2 = C_1^2\sigma_{x_1}^2 + C_2^2\sigma_{x_2}^2 + \dots + C_n^2\sigma_{x_n}^2$$

$$\sigma_{x+y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

$$\sigma_{x-y}^2 = \sigma_x^2 + \sigma_y^2$$

اگر x و y متغیرهای تصادفی مستقل و S و T مجموعه اعداد باشند، در این صورت:

$$P(X \in S, Y \in T) = P(X \in S) \cdot P(Y \in T)$$

به طور کلی:

$$P(X_1 \in S_1, X_2 \in S_2, \dots, X_n \in S_n) = P(X_1 \in S_1) \cdot P(X_2 \in S_2) \cdot \dots \cdot P(X_n \in S_n)$$

مثال: قاب پلاستیکی لوح‌های فشرده (CD) با طول و عرض آن‌ها بررسی می‌شوند. اگر x طول

و y عرض برحسب میلی‌متر باشند. تابع جرم احتمال X به صورت $P(x=129)=0/2$ و

$P(x=130)=0/7$ و $P(x=131)=0/1$ و تابع جرم احتمال y به صورت $P(y=15)=0/6$ و

$P(y=16)=0/4$ تعریف می‌شود. احتمال این که سطح 1935 mm^2 باشد چقدر است؟

اگر $x=129$ و $y=15$ باشد سطح 1935 خواهد شد.

$$P(A=1935)=P(x=129, y=15)$$

$$=P(x=129)P(y=15)$$

$$=(0/2)(0/6)=0/12$$

مثال: لقی سیلندر و پیستون یک DWT^۱؛ یعنی، فاصله بین پیستون و دیواره سیلندر برابر است با نصف اختلاف قطر سیلندر و پیستون. فرض کنید که میانگین قطر پیستون ۸۰/۸۵cm با انحراف معیار ۰/۰۲ cm و میانگین قطر سیلندر ۸۰/۹۵cm با انحراف معیار ۰/۰۳ cm است. میانگین و انحراف معیار لقی را پیدا کنید.

$$C = 0.5 X_1 - 0.5 X_2$$

$$\begin{aligned}\mu_C &= \mu_{0.5 X_1} - \mu_{0.5 X_2} = 0.5 \mu_{X_1} - 0.5 \mu_{X_2} \\ &= 0.5(80.95) - 0.5(80.85) = 0.050\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma_C &= \sqrt{\sigma_{0.5 X_1}^2 - 0.5 X_2} = \sqrt{(0.5)^2 \sigma_{X_1}^2 + (-0.5)^2 \sigma_{X_2}^2} \\ &= \sqrt{0.25(0.02)^2 + 0.25(0.03)^2} = 0.018\end{aligned}$$

نمونه‌های تصادفی ساده و مستقل

وقتی یک نمونه ساده تصادفی از مقادیر عددی یک جامعه آماری انتخاب می‌شود، هر آیت‌م از نمونه را می‌توان متغیر تصادفی در نظر گرفت. این آیت‌م‌ها ممکن است رفتار وابسته‌ای داشته باشند؛ مگر این که نمونه از بخش بزرگی از جامعه آماری (بیش از ۰/۵) تشکیل شده باشد. اگر $X_1, \dots, X_n$ یک نمونه تصادفی ساده از جامعه آماری با میانگین μ و واریانس σ^2 باشد در این صورت میانگین ($\bar{X}$) متغیر تصادفی ساده برابر است با:

$$\mu_{\bar{X}} = \mu$$

$$\sigma_{\bar{X}}^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: در فرآیندی که بطری‌های پلاستیکی با آب پر می‌شوند؛ میانگین حجم پر شده ۲/۰۱۳L و انحراف معیار ۰/۰۰۵L است. فرض کنید که یک نمونه تصادفی ۲۴ تایی از بطری‌های پر شده انتخاب می‌شود. میانگین و انحراف معیار حجم متوسط هر بطری چقدر است؟

$$\mu_{\bar{V}} = \mu = 2.013$$

$$\sigma_{\bar{P}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}} = 0.001$$

توابع چگالی احتمال مختلفی وجود دارد که هر یک جوامع آماری متفاوتی از فرآیندهای فیزیکی با ویژگی‌های خاص را شامل می‌شوند. بعضی از توابع چگالی احتمال، خاص فرآیندهای گسسته‌اند (فرآیندهایی که خروجی آن‌ها گسسته‌اند) مانند تابع چگالی احتمال دو جمله‌ای که به احتمال مقدار خروجی (n) موفق در N تکرار، می‌پردازد. این تابع به عنوان مثال؛ به توصیف احتمال حصول مجموع اعداد در انداختن یک جفت تاس می‌پردازد. "تابع چگالی احتمال پواسون" به مدل کردن احتمال روی دادن رویدادهایی که به ندرت رخ می‌دهند، می‌پردازد. این تابع را از تابع دو جمله‌ای می‌توان به دست آورد. مثال‌هایی از کاربرد تابع چگالی احتمال پواسون: مقدار پرتوزایی مختلف یک ایزوتوپ و تعداد سنگ‌های کوچکی که به یک فضاپیما اصابت می‌کند. اگرچه خروجی این فرآیندها گسسته‌اند اما به دلیل این که تعداد بسیار زیادی از رویدادها در نظر گرفته می‌شود فرآیند را پیوسته در نظر می‌گیرند. در واقع چون مقدار احتمال خروجی‌ها دامنه بزرگی را تشکیل می‌دهد، می‌توان گستره را پیوسته فرض کرد.

تابع چگالی احتمال دیگر برای فرآیندهای پیوسته، تابع چگالی احتمال نرمال (گوسی) است. خیلی از رویدادها تقریباً از توزیع نرمال پیروی می‌کنند. مانند رسیدن به خط پایان شرکت‌کنندگان در مسابقه دو ماراتن، نمرات امتحانی یک کلاس، ضریب هوش (IQ) افراد غیردانشگاهی. تابع چگالی احتمال Lognormal شبیه تابع چگالی احتمال نرمال است؛ اما متغیرهایی را شامل می‌شود که از لگاریتم متغیر دیگری به دست می‌آیند. توزیع اندازه قطرات باران و همچنین سیستم‌های بیولوژیکی مختلف به صورت Lognormal است.

توزیع دو جمله‌ای

در یک آزمایش با N تکرار مستقل و احتمال (P) این که دقیقاً رویدادی n بار ($n \leq N$) اتفاق بیفتد با تابع چگالی احتمال دو جمله‌ای بیان می‌شود:

$$P(n) = \left[\frac{N!}{(N-n)!n!} \right] P^n (1-P)^{N-n}$$

میانگین و واریانس در این توزیع به ترتیب NP و NPQ است که Q تعداد عیوب^۱ است که برابر 1-p می‌باشد. اگر N ثابت و P بزرگ باشد، تابع چگالی احتمال به سمت راست چولگی^۲ پیدا می‌کند و اگر P ثابت و N بزرگ باشد تابع چگالی احتمال متقارن می‌شود برای N بزرگ و P کوچک و محدود، این تابع به تابع نرمال میل می‌کند.

مثال: فرض کنید پنج نفر در دوره آموزشی برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری شرکت کرده و سه چهارم آن‌ها در این دوره قبول شده‌اند. احتمال این که تعداد ۵، ۴، ۳، ۲، ۱، ۰ نفر این دوره را قبول شوند، چقدر است؟

پاسخ:

$$N=5, P=0.75, n=0, 1, 2, 3, 4, 5$$

$$P(0)=1 \times (0.75)^5 \cdot (0.25)^0 = 0.010$$

$$P(1)=5 \times (0.75)^4 \cdot (0.25)^1 = 0.146$$

$$P(2)=10 \times (0.75)^3 \cdot (0.25)^2 = 0.1879$$

$$P(3)=10 \times (0.75)^2 \cdot (0.25)^3 = 0.264$$

$$P(4)=5 \times (0.75)^1 \cdot (0.25)^4 = 0.396$$

$$P(5)=1 \times (0.75)^0 \cdot (0.25)^5 = 0.237$$

$$\text{جمع} = 1.0000$$

توزیع پواسون

در توزیع دو جمله‌ای اگر N بسیار بزرگ و P بسیار کوچک و نزدیک صفر (پدیده‌ای که به ندرت رخ می‌دهد) باشد، مقدار میانگین ($NP=$) متناهی خواهد شد و تابع چگالی به تابع چگالی پواسون نزدیک می‌شود. با این شرایط تابع چگالی احتمال پواسون قادر به محاسبه احتمال n رویداد کم نظیر خواهد بود.

$$P(n) = \frac{(NP)^n}{n!} e^{-NP}$$

میانگین و واریانس این توزیع NP است. توجه داشته باشید که $1-P \approx 1$ است.

1- Failure
2- Skewed

مثال: هسته‌های یک ایزوتوپ تعداد 2×10^{20} ذره آلفا در هر ثانیه منتشر می‌کند، در این صورت احتمال انتشار هر ذره آلفا یک بر 2×10^{20} خواهد بود. فرض کنید که ماده‌ی مورد نظر 10^{20} اتم داشته باشد. احتمال این که تعداد، ۱، ۲، ...، ۸ انتشار ذره آلفا رخ دهد چقدر است؟

پاسخ:

$$N = 10^{20}, P = 2 \times 10^{-20}, n = 1, 2, \dots, 8$$

$$P(0) = 0.135$$

$$P(1) = 0.271$$

$$P(2) = 0.371$$

$$P(3) = 0.180$$

$$P(4) = 0.090$$

$$P(5) = 0.036$$

$$P(6) = 0.012$$

$$P(7) = 0.003$$

$$P(8) = 0.001$$

$$\text{جمع} = 0.999$$

توزیع نرمال

وقتی که N خیلی بزرگ و P متناهی باشد، با فرض ثابت بودن واریانس، تابع چگالی احتمال دو جمله‌ای به تابع چگالی احتمال نرمال تبدیل می‌شود.

می‌دانیم که خطای تصادفی شامل تعداد زیادی (N) از خطاهایی است که مقدار آن‌ها برابر و اندازه‌شان کوچک است (e) و هر یک شانس برابر دارند که مثبت یا منفی شوند. به عبارت دیگر $P = \frac{1}{2}$ است. این توزیع به ما اجازه می‌دهد که احتمال روی دادن هر خطا را در گستره‌ی $-Ne$ تا $+Ne$ تعیین کنیم. این تابع به صورت زیر است:

$$P(X) = \frac{1}{\sqrt{2\pi NP(1-P)}} \exp \left[-\frac{(X - NP)^2}{2NP(1-P)} \right]$$

میانگین و واریانس این توزیع مشابه توزیع دو جمله‌ای؛ یعنی، NP و NPQ است. این تابع به

صورت زیر هم بیان می‌شود.

$$P(X) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(X - X')^2\right]$$

تابع چگالی احتمال نرمال، یک تابع ویژه‌ای است. تعدادی از توابع چگالی با افزایش اندازه نمونه به این تابع میل می‌کنند. این به دلیل قضیه حد مرکزی و تئوری‌های مربوط است. به طور خلاصه، قضیه حد مرکزی را می‌توان چنین بیان داشت: برای مقادیری که یک جامعه آماری را تشکیل می‌دهند و مقدار واریانس آن‌ها متناهی است، اگر نمونه‌های مستقلی که تعداد هر نمونه N باشد، انتخاب کنیم، میانگین این نمونه‌ها تمایل دارند که از تابع چگالی احتمال نرمال پیروی کنند، صرف‌نظر از این که جامعه‌ی اولیه چه توزیعی دارد. به عبارت دیگر قضیه حد مرکزی بیان می‌کند که توزیع متغیرهای مستقل هر چه باشد تحت شرایط معین، تابع چگالی احتمال مجموع آن‌ها به تابع چگالی احتمال نرمال میل می‌کند (با میانگینی برابر میانگین مجموع آن‌ها و واریانسی برابر با واریانس مجموع آن‌ها). این شرایط معین عبارتند از:

(۱) متغیرها به صورت استاندارد شده و بدون بعد بیان شوند؛

(۲) تک تک مقادیر تغییرات زیادی نداشته باشند؛

(۳) اگر n به سمت بی‌نهایت میل کند مجموع واریانس‌ها هم به سمت بی‌نهایت میل کند.

این تابع چگالی در اندازه‌گیری‌هایی کاربرد خوب دارد که انحراف اندازه ده از مقدار مرکزی آن (مرکزگرایی آن) از تأثیرات تصادفی کوچک باشد و حداقل امکان خطاهای سیستماتیک حذف گردند.

متغیرهای نرمال شده

برای سادگی محاسبات آماری، اغلب متغیرهای آماری به متغیرهای بدون بعد تبدیل می‌شوند. متغیر نرمال استاندارد شده β مربوط به متغیر آماری X به صورت زیر بیان می‌شود:

$$\beta = \frac{X - X'}{\sigma} \quad (۱)$$

در واقع متغیر بدون بعد β بیان می‌کند که X در فاصله‌ی چند انحراف معیار از میانگین خود قرار دارد. وقتی مقدار معینی از X ، مانند X_1 را در نظر بگیریم، متغیر نرمال استاندارد شده را متغیر نرمال شده Z می‌نامند و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$Z_1 = \frac{X_1 - X'}{\sigma} \quad (۲)$$

این تعاریف را می‌توان در محاسبه احتمال متغیرهای دیمانسیون‌دار شرکت داد تا بتوان بیان مطابق با آن را برای متغیر بدون بعد به‌دست آورد. احتمال این که متغیر دیمانسیون‌دار X در گستره $X' \pm \delta x$ قرار داشته باشد را به صورت زیر می‌تواند نوشت:

$$p(X' - \delta x \leq x < X' + \delta x) = \int_{X' - \delta x}^{X' + \delta x} P(x) dx$$

پهنای گستره $2\delta x$ است که به صورت Δx نیز بیان می‌شود. همچنین:

$$P(-x_1 \leq x < +x_1) = \int_{-x_1}^{+x_1} P(x) dx$$

این معادله کلی را برای متغیرهایی که به صورت نرمال توزیع شده است می‌توان نوشت:

$$P(-x_1 \leq x \leq +x_1) = \int_{-x_1}^{+x_1} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2\sigma^2}(x-x')^2\right] dx$$

با توجه به روابط (۱) و (۲) و همچنین $dx = \sigma d\beta$ داریم:

$$\begin{aligned} P(-Z \leq \beta \leq Z_1) &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-Z_1}^{+Z_1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) \sigma d\beta \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-Z_1}^{+Z_1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta \\ &= 2 \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+Z_1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta \right] \end{aligned}$$

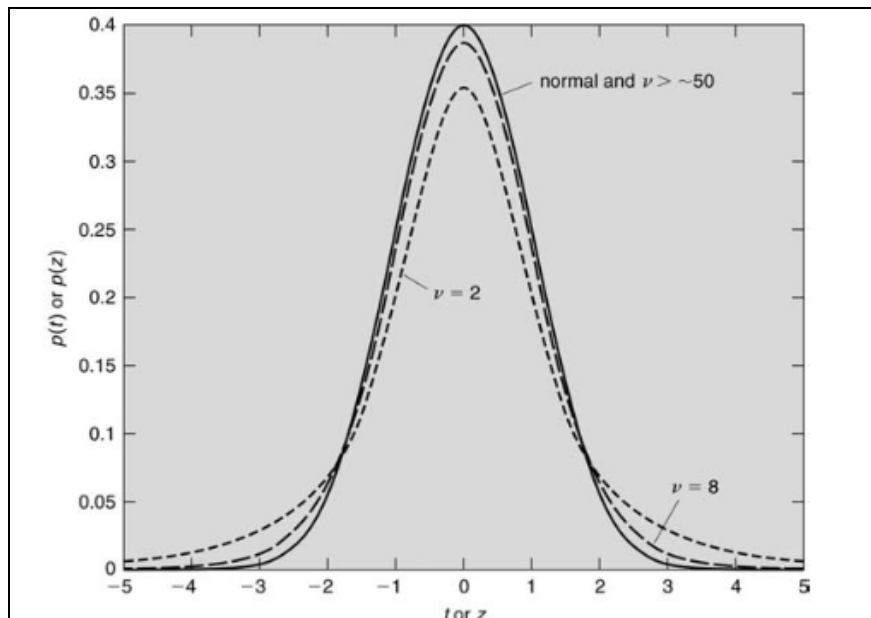
مطابق شکل زیر، ضریب ۲ نشان‌دهنده‌ی متقارن بودن تابع چگالی احتمال نرمال است و در آن $P(X)$ برحسب تابع نرمال شده متغیر Z می‌باشد. جمله مندرج در داخل کروشه تابع خطای نرمال نامیده و به صورت $P(Z_1)$ نمایش داده می‌شود.

$$P(Z_1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+Z_1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta$$

مقدار $P(Z_1)$ در جداول بر حسب Z_1 آمده است. به عنوان مثال ۳۴/۱۳٪ احتمال دارد که متغیر

نرمال Z_1 در گستره $x_1 - x' = 0$ تا $x_1 - x' = \delta [P(Z_1) = 0.3413]$ قرار دارد. به عبارت دیگر 34.13% احتمال دارد که این متغیر در فاصله یک انحراف معیار بالا میانگین قرار بگیرد. توجه داشته باشید که تابع خطای نرمال، یک طرفه است به دلیل این که حدود انتگرال از 0 تا $+Z_1$ است. بعضی از جداول دو طرفه‌اند؛ یعنی، حدود انتگرال از $-Z_1$ تا $+Z_1$ است. همیشه در استفاده از این جداول باید از یک طرفه یا دو طرفه بودن آن آگاه بود.

با استفاده از تعریف Z_1 ، احتمال این که مقدار متغیری که به صورت نرمال توزیع شده (X_1) در گستره $X' \pm Z_1 \delta$ قرار دارد برابر است با:

توابع احتمال توزیع نرمال و t

$$2P(Z_1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{+Z_1} \exp\left(-\frac{\beta^2}{2}\right) d\beta = \frac{\%P}{100}$$

به عبارت دیگر، P درصد احتمال دارد که متغیر X_1 در فاصله $(\pm ZP)$ برابر انحراف معیار، میانگین قرار داشته باشد:

$$X_1 = X' \pm ZP\delta(\%P)$$

مثال: فرض کنید تعداد بسیار زیادی ولتاژ اندازه‌گیری شده باشد. میانگین این مقادیر V ۸/۵ و انحراف معیار آن V^2 ۲/۲۵ است. مطلوب است محاسبه احتمال این که یک اندازه‌گیری در فاصله ۱۰ تا ۱۱/۵ ولت قرار گیرد.

پاسخ: باید $P(10.0) \leq X \leq P(11.5)$ محاسبه شود.

$$P(10.0 \leq x \leq 11.5) = P(8.5 \leq x \leq 11.5) - P(8.5 \leq x \leq 10.0)$$

احتمال‌های سمت راست معادله‌ی فوق با محاسبه مقادیر متغیر Z نرمال شده‌ی آن، قابل حصول است.

$$P(8.5 \leq x \leq 10.0) : z = \frac{x - x'}{\delta} = \frac{10 - 8.5}{1.5} = 1 \Rightarrow P(8.5 \leq x \leq 10.0) = \frac{0.6872}{2} = 0.3413$$

$$P(8.5 \leq x \leq 11.5) : z = \frac{11.5 - 8.5}{1.5} = 2 \Rightarrow P(8.5 \leq x \leq 11.5) = \frac{0.9545}{2} = 0.4772$$

بنابراین:

$$P(10.0 \leq x \leq 11.5) = 0.4772 - 0.3413 = 0.1359 = \% 13.59$$

به طور مشابه احتمال این که یک اندازه‌گیری ولتاژ در بازه ۱۰ تا ۱۳ ولت بیفتد برابر است با ۱۵/۷۴٪.

مثال: بر اساس گزارش گشت اتوبان یکی از ایالت‌های آمریکا میانگین سرعت رانندگان در عصر جمعه ۶۷mph با انحراف معیار ۴mph است.

از ۱۰۰۰ سفر چند راننده با سرعت بیش از ۷۲ mph حرکت می‌کنند؟

پاسخ: فرض کنید که توزیع سرعت رانندگان نرمال باشد. سرعت ۷۲mph را به مقدار متناظر z تبدیل می‌کنیم.

$$z = \frac{72 - 67}{4} = 1.2$$

$$P[z > 1.2] = 1 - \Pr[z \leq 1.2] = 1 - (\Pr[-\infty \leq z \leq 0] + \Pr[0 \leq z \leq 1.2])$$

با توجه به جدول یک طرفه احتمال متغیر Z :

$$P[0 \leq z \leq 1.2] = 0.3849$$

با توجه به این که توزیع احتمال نرمال حول میانگین متقارن است:

$$P[-\infty \leq z \leq 0] = 0.5000$$

$$Pr[z > 1.2] = 1 - (0.5000 + 0.3849) = 0.1151$$

به عبارت دیگر، عصر جمعه تقریباً از هر هزار راننده ۱۱۵ راننده با سرعت بیش از ۷۲ mph حرکت می‌کنند.

تابع توزیع t

حدود صد و هشت سال پیش (۱۹۰۸) ویلیام گاسیت^۱، متوجه مشکلات استفاده از توزیع نرمال در توصیف یک نمونه مشخص و کوچک شد. وی توانست توزیع جدیدی را توسعه دهد که در مقایسه با توزیع نرمال، توزیع نمونه‌های کوچک را بهتر توصیف نماید. با توجه به این که کارفرمای او، اجازه‌ی انتشار این یافته را نمی‌داد، او یافته‌ی خود را با نام مستعار توزیع t (دانشجو) منتشر کرد. خلاصه‌ی آن چه را که گاسیت به آن دست یافت در شکل مربوط به توابع احتمال توزیع نرمال و t ، آمده است. منحنی توپر مربوط به مقادیر تابع چگالی احتمال نرمال در Z های مختلف است. همچنین در این شکل، تابع چگالی احتمال برای مقادیر مختلف t با حجم نمونه‌ی کوچک ($N < 100$) مشخص شده است.

منحنی خط‌چین، تابع چگالی احتمال t را در مقادیر مختلف و برای نمونه‌ی ۹-تایی نشان می‌دهد. منحنی نقطه‌چین متعلق به نمونه‌ای با سه عضو است. هر چه اندازه‌ی نمونه کوچکتر می‌شود، تابع چگالی احتمال نرمال در نزدیکی میانگین خود (جایی که $Z=0$ است) تخمینی اضافی از برآورد احتمالات نمونه و در مقادیر کرانه‌ای (جایی که $Z < N-2$) تخمینی کمتر از برآورد احتمالات نمونه دارد.

تابع چگالی احتمال توزیع t به صورت زیر بیان می‌شود:

$$P(t, \nu) = \frac{\Gamma[(N+1)/2]}{\sqrt{\pi\nu}\Gamma(N/2)} \left[1 + \frac{t^2}{\nu} \right]^{-(N-\nu)/2}$$

1- William Gosset

U درجه آزادی و Γ تابع گاما با خواص زیر است:

$$\Gamma(n) = (n-1)!, \quad n = \text{عدد صحیح}$$

$$\Gamma(m) = (m-1)(m-2)\dots\left(\frac{3}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\sqrt{\pi}, \quad m = \text{عدد صحیح - نصف}$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

قابل ذکر است که در هر $P(t, U)$ ، به ازای هر مقدار U ، تعدادی توابع چگالی احتمال t و همچنین چندین منحنی برای هر مقدار N وجود دارد.

مفهوم آماری درجه آزادی توسط فیشر در سال ۱۹۲۴ معرفی شد. تعداد درجه آزادی (U) در هر مرحله از محاسبات آماری برابر است با تعداد داده‌های ثبت شده (N) منهای تعداد قیود (C) مستقل و مختلف مورد نیاز در محاسبات؛ یعنی، $U = N - C$. به عنوان مثال، در محاسبه میانگین نمونه، قیدی وجود ندارد ($C=0$) به دلیل آن که فقط از مقادیر واقعی نمونه در محاسبه میانگین استفاده می‌شود و بنابراین $U = N$ است. اما اگر هدف محاسبه انحراف معیار یا واریانس نمونه باشد، وجود مقدار میانگین نمونه (یک قید) لازم است، در این صورت $U = N - 1$. در واقع درجه آزادی، اختیاری است که به یک مجموعه از داده اجازه تغییرپذیری یا خطا را می‌دهد. هر قید یا ثابتی که از یک مجموعه داده محاسبه می‌شود، یک درجه آزادی دارد. البته، با این فرض که داده‌ها از یک جامعه تصادفی نرمال به دست آمده باشد. پس در محاسبه انحراف معیار، وجود میانگین (قید) لازم است و یک درجه آزادی به آن اختصاص داده می‌شود.^۱

اگر مجموعه داده‌های ما در یک اندازه‌گیری شامل دو نقطه باشد و از آن جایی که از دو نقطه یک خط راست عبور می‌کند، بنابراین در این مجموعه داده، به دلیل این که در رسم هر خطی مانند $Y = ax + b$ به دو ثابت نیازمندیم، آزادی در خط وجود ندارد، پس برای رسم هر خط، دو درجه آزادی اختصاص می‌یابد که این امر به عدم وجود خطا در برازش خط منجر می‌شود. حال اگر برای رسم خط راست سه نقطه در دسترس باشد چون معمولاً یکی از نقاط دقیقاً روی خط قرار نمی‌گیرد، بنابراین مقداری خطا در توصیف این خط وجود خواهد داشت. به بیان دیگر در اینجا یک درجه آزادی ($3 - 2 = 1$) وجود دارد. لازم به ذکر است که آزادی در وجود خطا با پراکندگی داده‌ها

۱- برای بحث بیشتر به مرجع زیر مراجعه شود.

2- Hicks, Charles R, fundamental concepts in statistics 2nd edition, holt- Rinehart Winston, 1964, p14.

در اطراف خط راست نشان داده می‌شود. توجه داشته باشید که وجود درجه آزادی؛ یعنی، این که هنوز امکان وجود خطای تصادفی وجود دارد و این خطا خود را به صورت انحراف از مقادیر محاسبه شده (در اینجا خط راست) نشان می‌دهد.

میانگین و انحراف معیار متغیر تصادفی پیوسته با فرض این که N خیلی زیاد است به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$x' = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$\sigma^2 = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N (x_i - x')^2$$

به طور مشابه برای متغیر تصادفی گسسته با فرض این که N کوچک است، می‌توان نوشت:

$$\bar{x} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_i$$

$$S_x^2 = \frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2$$

$\bar{x}$ میانگین نمونه است که معمولاً با میانگین واقعی x' اختلاف داد. همچنین S_x^2 واریانس نمونه در مقایسه با واریانس واقعی σ^2 است.

مثال: آزمونی را در نظر بگیرید که ۱۹ مقدار زیر برای کمیت فشار با یکای kpa نسبت شده است:

۴/۹۴ ، ۴/۹۲ ، ۵/۰۲ ، ۴/۹۸ ، ۵/۰۱ ، ۵/۰۶ ، ۴/۹۱ ، ۴/۹۲ ، ۴/۹۸ ، ۵/۰۰ ، ۴/۹۳ ، ۴/۹۲ ، ۴/۹۷

۴/۹۷ ، ۵/۰۰ ، ۵/۰۴ ، ۴/۹۲ ، ۴/۹۹ ، ۴/۹۸

گستره‌ای را برآورد کنید که اندازه‌گیری بعدی فشار با اطمینان $P=95\%$ در آن قرار دارد.

حل: با استفاده از مقادیر موجود، میانگین و انحراف معیار نمونه با فرض N کوچک محاسبه می‌کنیم.

$$\bar{P} = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} P_i = 4.97, s_p = \sqrt{\frac{1}{19-1} \sum_{i=1}^{19} (P_i - \bar{P})^2} = 0.046$$

با استفاده از جداول:

$$\nu = N - 1 = 18, t_{\nu, p} = t_{18, 95} = 2.101$$

$$P_i = \bar{P} \pm t_{\nu, p} S_p (\%P) = 4.97 \pm 0.10 (\%95)$$

بنابراین برآورد می‌شود که اندازه‌گیری فشار بعدی با اطمینان ۹۵٪، در گستره‌ی ۴/۸۷ kpa تا ۵/۰۷ kpa قرار داشته باشد. برای حالتی با پنج اندازه‌گیری و انحراف معیار و میانگین مشابه، نتیجه‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$t_{\nu, p} = t_{4, 95} = 2.770 \Rightarrow P_i = 4.97 \pm 0.13 (\%95)$$

در این حالت، برآورد می‌شود که فشار بعدی در گستره ۴/۸۴ kpa تا ۵/۱۰ kpa با همان اطمینان قرار داشته باشد. بنابراین با اطمینان مشابه هر چه اندازه‌ی نمونه کوچکتر شود، عدم قطعیت گسترده‌تر می‌شود.

مثال فوق را با اطمینان ۵۰٪ بررسی می‌کنیم.

$$t_{\nu, p} = t_{18, 50} = 0.668 \Rightarrow P_i = 4.97 \pm 0.03 (0.50)$$

در این حالت برآورد می‌شود که فشار بعدی در گستره‌ی ۴/۹۴ kpa تا ۵/۰۰ kpa با اطمینان ۵۰٪ قرار داشته باشد. بنابراین با تعداد نمونه مشابه، چنانچه اطمینان را کاهش دهیم گستره‌ی عدم قطعیت باریک‌تر می‌شود. در مقابل با اطمینان ۱۰۰٪، گستره، تمام مقادیر ممکن را شامل می‌شود.

$t_{v,p}$	$\%P_{v=2}$	$\%P_{v=8}$	$\%P_{v=100}$
۱	۵۷/۷۴	۶۵/۳۴	۶۸/۰۳
۲	۸۱/۶۵	۹۱/۹۵	۹۵/۱۸
۳	۹۰/۴۵	۹۸/۲۹	۹۹/۶۶
۴	۹۴/۲۸	۹۹/۶۱	۹۹/۹۹

احتمالات مربوط به مقادیر ویژه $t_{v,p}$

z_p	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4758	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4799	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
4.0	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

مقادیر تابع خطا نرمال

در مقایسه با نرمال کردن متغیر Z ، برای متغیر t هم می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$t_1 = \frac{x_i - \bar{x}}{S_x}$$

متغیر x_i که به صورت نرمال توزیع شده، در نمونه‌های کوچک با اطمینان $p\%$ در اطراف میانگین خود و در گستره‌ای با $\pm t_{v,p}$ برابر انحراف معیار نمونه قرار دارد و معمولاً به صورت زیر بیان می‌شود.

$$x_i = \bar{x} \pm t_{v,p} S_x = (\%P)$$

انحراف معیار میانگین (SDOM)

ممکن است سؤال شود، اگر آزمایشی چندین بار تکرار و مقادیر میانگین مختلفی حاصل شود، در آن صورت چه پراکندگی برای این میانگین‌ها می‌توان انتظار داشت؟ ممکن است در مواردی، تکرار آزمایش امکان‌پذیر نباشد، در این صورت این سؤال مطرح می‌شود که آیا می‌توان پراکندگی مقادیر میانگین را فقط از میانگین یک سری داده تعیین نمود؟

فرض کنید M مجموعه (نمونه) وجود دارد که از N اندازه ده تشکیل شده‌اند. هر اندازه ده را به صورت $x_{i,j}$ مشخص می‌کنیم که $i=1, \dots, N$ ، اعداد هر مجموعه را مشخص می‌کند و $j=1, \dots, M$ بیانگر مجموعه‌ها است. بنابراین میانگین $\bar{x}_j$ و انحراف معیار S_{xj} هر مجموعه برابر است با:

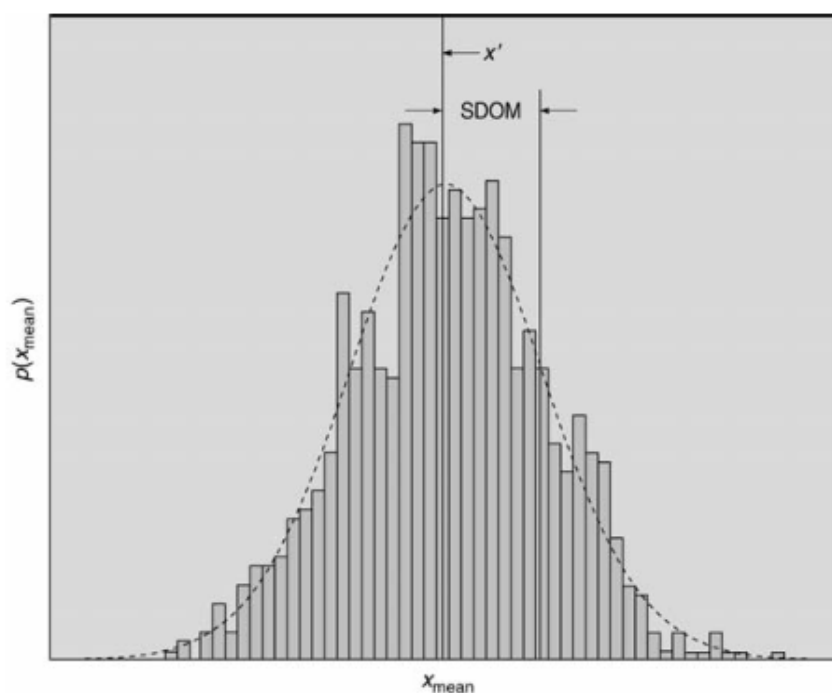
$$\bar{x}_j = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij}$$

$$S_{xj} = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (x_{i,j} - \bar{x}_j)^2}$$

با توجه به این که هر $\bar{x}_j$ یک متغیر تصادفی است، مطابق قضیه حد مرکزی، به صورت نرمال در اطراف میانگین خود (میانگین مقادیر میانگین) توزیع می‌شود.

$$\bar{\bar{x}} = \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \bar{x}_j$$

این موضوع در شکل زیر نشان داده شده است:



تابع چگالی احتمال مقادیر میانگین $\bar{x}$

انحراف معیار مقادیر میانگین با رابطه زیر تعیین می‌شود:

$$S_{\bar{x}} = \left[\frac{1}{M-1} \sum_{j=1}^M (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 \right]^{1/2}$$

$$S_{\bar{x}} = \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

این رابطه‌ی ساده به ما اجازه می‌دهد که در یک مجموعه متناهی داده، گستره‌ای را به دست آوریم که شامل میانگین واقعی یک جامعه آماری است.

$$x' = \bar{x} \pm t_{v,p} S_{\bar{x}} = \bar{x} \pm t_{v,p} \frac{S_x}{\sqrt{N}}$$

این رابطه نشان می‌دهد، حدودی که شامل x' می‌شود قابل کاهش است. به این معنی که با افزایش N یا کاهش مقدار S ، می‌توان برآورد x' را دقیق‌تر انجام داد. مثال: در مثال قبل، گستره‌ای را که شامل مقدار میانگین واقعی است، محاسبه کنید. پاسخ:

$$P' = \bar{P} \pm t_{x',P} S_{\bar{P}} = \bar{P} \pm t_{x',P} \frac{S_P}{\sqrt{N}} (\%P)$$

$$P' = 4.97 \pm \frac{(2.101)(0.046)\sqrt{19}}{\sqrt{19}} = 4.97 \pm 0.02 (\%95)$$

بنابراین با اطمینان ۹۵ درصد، برآورد می‌شود که مقدار واقعی میانگین در گستره ۴/۹۵ kpa تا ۴/۹۹ kpa قرار دارد.

لازم است به این نکته‌ی بسیار مهم اشاره کنیم. علی‌رغم شباهت دو رابطه $x_i = \bar{x} \pm t_{v,P} S_x (\%P)$ و $x' = \bar{x} \pm t_{v,P} S_{\bar{x}}$ ، کاملاً با هم تفاوت دارند. با وجود این که هر دو رابطه از مقدار میانگین نمونه، انحراف معیار و مقدار اندازه‌ده یکسانی استفاده می‌کنند، اما از اولی برای برآورد گستره‌ای که مقدار بعدی اندازه‌گیری x_i با اطمینان مشخص در آن قرار دارد، استفاده می‌شود و دومی برای برآورد گستره‌ای که شامل مقدار واقعی میانگین با اطمینان مشخص است، به کار می‌رود.

انحراف معیار ادغام شده

تاکنون از یک برآورد برای انحراف معیار صحبت کردیم، اما مواردی وجود دارد که برای یک متغیر چندین برآورد در دسترس است. با ترکیب این برآوردها، می‌توان برآورد بهتری برای جامعه‌ی آماری به دست آورد، مشروط بر این که قبلاً آزمون همگنی برای هر یک از برآوردها انجام شده باشد. رابطه‌ای که برای چند انحراف معیار به کار می‌رود، به صورت زیر است:

$$S_{X,pooled} = \frac{\left\{ \sum (s_{x,i})^2 v_i \right\}^{1/2}}{\left[\sum v_i \right]^{1/2}}$$

درجه آزادی، انحراف معیار ادغام شده با رابطه زیر به دست می‌آید.

$$v_{pooled} = \sum v_i$$

مثال: تغییرپذیری جریان گاز عبوری، در مدت ۳ روز مطابق جدول زیر است.

روز	انحراف معیار (m ³)	درجه آزادی
۱	۲۳	۵
۲	۱۹	۱۱
۳	۲۷	۸

$$S_{x,pooled} = \frac{\left[\left((23)^2 \times 5 \right) + \left((19)^2 \times 11 \right) + \left((27)^2 \times 8 \right) \right]^{1/2}}{(5+11+8)^{1/2}} = 22.8$$

بهترین برآورد انحراف جامعه آماری ۲۲/۸ است. درجه آزادی این انحراف معیار برابر است با:

$$v_{pooled} = 5 + 11 + 8 = 24$$

تابع احتمال مستطیلی

تابع توزیع مستطیلی $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{1}{2a} \quad -a \leq x \leq a$$

$$f(x) = 0 \quad \text{برای سایر مقادیر } x$$

مطابق این تابع، احتمال یافتن متغیر x در بازه $-a \leq x \leq a$ یکسان و برابر $\frac{1}{2a}$ است. این

تابع را تابع احتمال مستطیلی یا ثابت می‌نامند.

میانگین تابع احتمال مستطیلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

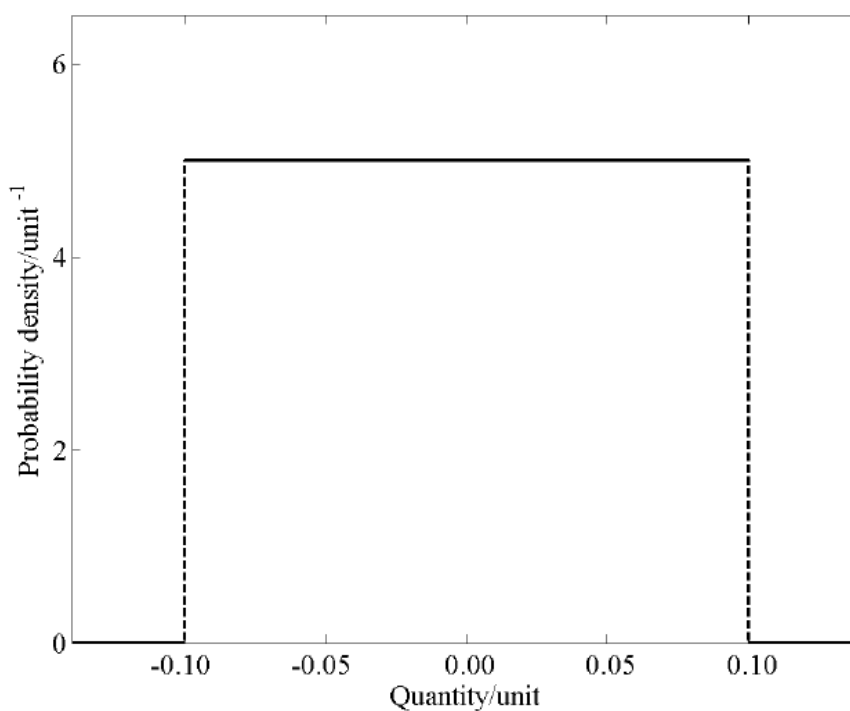
$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-a}^{+a} \frac{x}{2a} dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^a = 0$$

واریانس یک تابع احتمال در حالتی که میانگین آن صفر باشد برابر است با:

$$\sigma^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x^2}{2a} dx = \frac{1}{2a} \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a$$

$$= \frac{1}{2a} \cdot \frac{2a^3}{3} = \frac{a^2}{3}$$

بنابراین انحراف معیار یا عدم قطعیت استاندارد، برابر است با: $\frac{a}{\sqrt{3}}$



توزیع احتمال مستطیلی با حدود ± 0.1 یکا و ± 0.1 یکا (کلمه یکا هر یکایی می‌تواند باشد)

کاربرد توزیع مستطیلی

غالباً، درانتخاب توزیع مستطیلی در برآورد نوع B عدم قطعیت اشتباه می‌شود. دلیل این انتخاب نادرست، سادگی محاسبات و توصیه‌های GUM می‌باشد. توزیع مستطیلی تحت شرایط مشخصی کاربرد دارد. این شرایط عبارتند از:

- کمینه مقدار حدود این توزیع باید کاملاً مشخص باشد;
- احتمال یافتن مقادیر در این حدود ۱۰۰٪ باشد;
- احتمال مقادیر در این حدود برابر باشد.

متدولوژی اصلی GUM مبتنی براین فرض است که توزیع خطاهای اصلی نرمال است (بند ۳.۴، GUM). در برخی از مثال‌های GUM، در شرایطی توزیع مستطیلی انتخاب شده است که به نظر می‌رسد با شرایط کاربرد آن ناسازگار است. این موضوع می‌تواند از این واقعیت ناشی شود که در زمان انتشار GUM، روش‌های برآورد نوع B و ابزارهای آن از استحکام و کارایی لازم برخوردار نبوده‌است. فلسفه‌ی استفاده مداوم و غیر مشخص از توزیع مستطیلی، می‌تواند تلاش‌هایی که با استفاده از عدم قطعیت در انجام آزمون‌های آماری، مدیریت فواصل کالیبراسیون، توسعه معنادار حدود اطمینان، رواداری‌ها و... صورت می‌پذیرد، تضعیف نماید. در موارد زیر انتخاب توزیع مستطیلی کاملاً منطقی به نظر می‌رسد:

- عدم قطعیت ناشی از تفکیک پذیری نشاندگی دستگاه اندازه‌گیری;
 - ورودی توان RF یک بار می‌تواند با زاویه فاز θ بین $\theta - \theta$ تا $\theta + \theta$ صورت پذیرد. اگر دلایل قانع کننده‌ای موجود نباشد، کاملاً منطقی است که فرض شود احتمال وقوع در این حدود یکنواخت است. لازم به ذکر است که اگر فرض بر این باشد که دامنه‌ی سیگنال، سینوسی است در این صورت توزیع ولتاژ ورودی U شکل خواهد بود;
 - عدم قطعیت ناشی از تبدیل یک سیگنال آنالوگ به دیجیتال.
- در مواردی مانند پایداری حمام‌های کالیبراسیون، بهتر است این توزیع مثلی یا U شکل، انتخاب شود.

تابع احتمال مثلی

در حالت تابع احتمال مثلی، احتمال مقدار واقعی در یک مقدار مشخص بیشینه است و این احتمال به صورت یکنواخت در طرفین این مقدار کاهش می‌یابد و در دو نقطه، صفر می‌شود. فرض کنید مقدار واقعی در مرکز با نیم بازهای $\pm a$ قرار دارد. احتمال قرار گرفتن مقدار واقعی از $-a$ تا صفر به صورت یکنواخت افزایش می‌یابد و در مقدار مشخصی بیشینه می‌گردد و مجدداً کاهش

می‌یابد و در $x=a$ صفر می‌شود. احتمال در $x = \pm a$ صفر است.

تابع احتمال مثلثی $f(x)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \frac{x+a}{a^2} \quad -a \leq x \leq 0$$

$$f(x) = \frac{a-x}{a^2} \quad 0 \leq x \leq a$$

$$f(x) = 0 \quad \text{برای سایر مقادیر } x$$

میانگین تابع احتمال مثلثی به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\begin{aligned} \bar{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-a}^0 \frac{x^2+ax}{a^2} dx + \int_0^a \frac{ax-x^2}{a^2} dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{ax^2}{2} \right]_{-a}^0 + \left[\frac{ax^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_0^a = \left[\frac{a^3}{3} - \frac{a^3}{2} \right] + \left[\frac{a^3}{2} - \frac{a^3}{3} \right] = 0 \end{aligned}$$

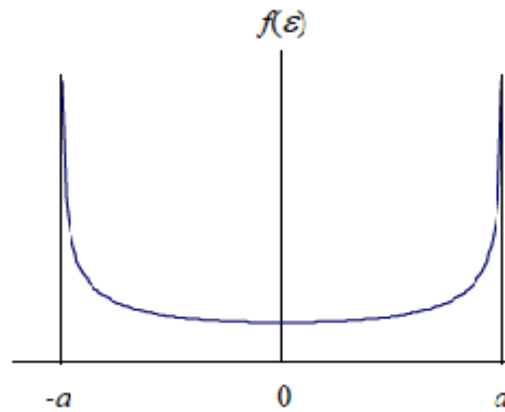
واریانس این تابع احتمال برابر است با:

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \int_{-a}^0 x^2 \frac{x+a}{a^2} dx + \int_0^a \frac{x^2(a-x)}{a^2} dx \\ \sigma^2 &= \frac{1}{a^2} \left[\frac{x^4}{4} - \frac{ax^3}{3} \right]_{-a}^0 + \frac{1}{a^2} \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_0^a = \frac{a^2}{6} \end{aligned}$$

بنابراین انحراف معیار یا عدم قطعیت استاندارد برابر است با: $\frac{a}{\sqrt{6}}$

تابع احتمال U شکل

توزیع U شکل معمولاً در سیگنال‌های سینوسی RF کاربرد دارد.



تابع توزیع U شکل

تابع چگالی احتمال برای توزیع U شکل به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{a^2 - x^2}} & -a \leq x \leq a \\ 0 & \text{سایر مقادیر} \end{cases}$$

مقدار a برابر است با:

$$a = \frac{L}{\sin(\pi p/2)} \quad \text{و} \quad L \leq a$$

مقدار a با توجه به حدود $\pm L$ و احتمال P تعریف می‌شود.

واریانس این تابع برابر است با:

$$\begin{aligned}\sigma^2(x) &= \frac{1}{\pi} \int_{-a}^a \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx \\ &= \frac{1}{\pi} \left[-\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \sin^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) \right]_{-a}^a \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a^2}{2} \sin^{-1}(1) - \frac{a^2}{2} \sin^{-1}(1) \right] \\ &= \frac{1}{\pi} \left[\frac{a^2}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right) - \frac{a^2}{2} \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right] = \frac{1}{\pi} \left[\frac{a^2 \pi}{2} \right] = \frac{a^2}{2}\end{aligned}$$

بنابراین انحراف معیار یا عدم قطعیت استاندارد برابر است با:

$$\frac{a}{\sqrt{2}}$$

تابع احتمال دوزنقه‌ای

توزیع دوزنقه‌ای مابین توزیع‌های مستطیلی و مثلثی قرار می‌گیرد. در توزیع مستطیلی، فرض بر این است که مقدار واقعی با احتمال برابر در گستره $-a$ تا $+a$ قرار دارد. در توزیع مثلثی، فرض بر این است که احتمال مقدار واقعی در مقدار مشخصی، بیشینه است و کاهش یکنواختی در طرفین آن مقدار دارد. در بسیاری از موارد واقعی، به نظر منطقی می‌رسد که فرض شود، مقدار واقعی در بازه‌ی باریکی در اطراف نقطه‌ی میانی با احتمال برابر قرار دارد. احتمال این که مقدار واقعی در خارج این بازه کوچک قرار گیرد به طور یکنواخت کاهش می‌یابد و در نقاط انتهایی a و $-a$ صفر می‌شود. در این حالت، منحنی توزیع احتمال، دوزنقه متقارنی است با گستره $2a$ در یک طرف، و $2\alpha\beta$ در طرفین موازی، β مقداری است مابین صفر و یک که اگر صفر باشد توزیع مستطیلی و یک باشد توزیع مثلثی خواهد شد. مساحت دوزنقه با ارتفاع k را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{مساحت} = \frac{(a - a\beta)k}{2} + 2a\beta k + \frac{(a - a\beta)k}{2} = a(1 + \beta)k$$

$$k = \frac{1}{a(1+\beta)} \quad \text{اگر مساحت برابر یک باشد:}$$

معادله تابع توزیع احتمالی که بیانگر خط راستی باشد و از نقاط $(-a, 0)$ و $(-a\beta, k)$ عبور کند، برابر است با:

$$y = \frac{k(a+x)}{a(1-\beta)} \Rightarrow y = \frac{a+x}{a^2(1-\beta^2)} \quad (۱)$$

خط افقی که از نقاط $(a\beta, k)$ و $(-a\beta, k)$ عبور نماید:

$$y = k = \frac{1}{a(1+\beta)} \quad (۲)$$

خطی که از نقاط $(a, 0)$ و $(a\beta, k)$ عبور کند:

$$y = \frac{a-x}{a^2(1-\beta^2)} \quad (۳)$$

با ترکیب معادلات (۱) و (۲) و (۳)، توزیع احتمال $f(x)$ - که تقارن دوزنقه‌ای دارد- حاصل می‌شود.

$$f(x) = \frac{a+x}{a^2(1-\beta^2)} \quad -a \leq x \leq -a\beta$$

$$f(x) = \frac{1}{a(1+\beta)} \quad -a\beta \leq x \leq a\beta$$

$$f(x) = \frac{a-x}{a^2(1-\beta^2)} \quad a\beta \leq x \leq a$$

$$f(x) = 0 \quad \text{برای سایر مقادیر } x$$

به سادگی می‌توان نشان داد که میانگین این تابع صفر است. اگر x^2 مربع انحراف از میانگین باشد، واریانس تابع احتمال ذوزنقه‌ای به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \int_{-a}^{-a\beta} \frac{a+x}{a^2(1-\beta^2)} x^2 dx + \int_{-a\beta}^{+a\beta} \frac{a(a-\beta)}{a^2(1-\beta^2)} x^2 dx + \int_{a\beta}^a \frac{a-x}{a^2(1-\beta^2)} x^2 dx \\ \sigma^2 &= \frac{1}{a^2(1-\beta^2)} \left\{ \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{x^4}{4} \right]_{-a}^{-a\beta} + \left[\frac{a(1-b)x^3}{3} \right]_{-a\beta}^{a\beta} + \left[\frac{ax^3}{3} - \frac{x^4}{4} \right]_{a\beta}^a \right\} \\ \sigma^2 &= \frac{1}{a^2(1-\beta^2)} \left[\left\{ \left(\frac{-a^4\beta^3}{3} + \frac{a^4\beta^4}{4} \right) - \left(\frac{a^4}{3} + \frac{a^4}{4} \right) \right\} + a(1-\beta) \left\{ \frac{a^3\beta^3}{3} + \frac{a^3\beta^4}{3} \right\} + \left\{ \left(\frac{a^4}{3} - \frac{a^4}{4} \right) - \left(\frac{a^4\beta^3}{3} - \frac{a^4\beta^4}{4} \right) \right\} \right] \\ \sigma^2 &= \frac{1}{a^2(1-\beta^2)} \left[\frac{a^4(1-\beta^4)}{6} \right] = \frac{a^2(1+\beta^2)}{6}\end{aligned}$$

بنابراین انحراف معیار یا عدم قطعیت استاندارد برابر است با:

$$a\sqrt{\frac{1+\beta^2}{6}}$$

رویکردهای مختلف در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری

دو رویکرد عمده در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری وجود دارد که عبارتند از: رویکرد درون آزمایشگاهی و رویکرد بین‌آزمایشگاهی. در رویکرد اول عدم قطعیت اندازه‌گیری در آزمایشگاه و در رویکرد دوم از طریق مطالعات مشترک برآورد می‌شود.

رویکرد درون آزمایشگاهی به دو روش اجرا می‌شود:

الف) استفاده از قانون انتشار عدم قطعیت براساس یک مدل ریاضی که در آن ارتباط کمی کمیت تحت اندازه‌گیری با سایر کمیت‌ها با یک معادله ریاضی مشخص می‌شود. خلاصه‌ای این روش که به روش مدل‌سازی هم معروف است در فصل ۸، GUM آمده است. این روش مبتنی بر تعریف یک مدل ریاضی است که ارتباط تمام کمیت‌هایی را که بر اندازه‌ده تاثیر قابل ملاحظه‌ای دارند، مشخص می‌کند. در این روش همه اثرات سیستماتیک غالب، تصحیح می‌شوند و چگونگی ترکیب عدم قطعیت‌های دخیل تحت عنوان قانون انتشار عدم قطعیت مشخص شده است.

ب) استفاده از روش صحنه‌گذاری در آزمایشگاه. منابع عمده تغییرپذیری را می‌توان با مطالعات مربوط به صحنه‌گذاری روش‌ها، ارزیابی نمود. با انجام این مطالعات تجربی در آزمایشگاه، اریبی، تکرارپذیری و تجدیدپذیری درون آزمایشگاهی برآورد می‌شوند. اطلاعات لازم را می‌توان از داده‌های

کنترل کیفی، مانند کنترل چارته‌ها به دست آورد. در این روش با بررسی تجربی تک‌تک اثرات مهم، اطلاعات مورد نیاز برای برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری فراهم می‌شود. برخی از استانداردها، روش نمایش یا بیان عدم قطعیت اندازه‌گیری را مشخص کرده‌اند. وقتی آزمایشگاه نشان می‌دهد که توانایی اجرای کامل روش استاندارد را دارد، می‌تواند نتایج را به صورت تعیین شده در استاندارد اظهار نماید.

رویکرد بین آزمایشگاهی نیز به دو روش اجرا می‌شود:

الف) استفاده از استانداردهای بین‌المللی ISO 5725 (یا استانداردهای ملی ۷۴۴۲)

منابع عمده تغییرپذیری را می‌توان از طریق مطالعات بین آزمایشگاهی و براساس استانداردهای ISO 5725 ارزیابی نمود. در این استانداردها، تکرارپذیری (S_r)، تجدیدپذیری (S_R) و صحت روش اندازه‌گیری تعیین می‌شود. برآورد عدم قطعیت براساس صحت و دقت داده‌های حاصل از استانداردهای ISO 5725 در استاندارد ISO 21748:2010 با عنوان "راهنمای استفاده از تخمین تکرارپذیری، تجدیدپذیری و صحت در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری" آمده است.

ب) استفاده از داده‌های آزمون مهارت (pt)

آزمون‌های مهارت به منظور بررسی عملکرد کلی آزمایشگاه، اجرا می‌شوند. آزمایشگاه نتایجی که از مشارکت در این آزمون‌ها به دست می‌آورد، در بررسی ارزیابی برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری مورد استفاده قرار می‌دهد. عدم قطعیت اندازه‌گیری آزمایشگاه باید با پراکندگی نتایج حاصل از آزمون مهارت سازگار باشد. روش pt در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری به کار می‌رود. به عنوان مثال، اگر همه‌ی شرکت کنندگان در آزمون مهارت از روش یکسانی استفاده کنند، انحراف معیار معادل با تجدیدپذیری بین آزمایشگاهی برابر است و از آن می‌توان تحت عنوان انحراف معیار تجدیدپذیری استفاده نمود.

فصل ششم

راهنمای بیان عدم قطعیت در اندازه‌گیری (GUM)

تنها چیزی که قطعیت دارد عدم قطعیت است

"ناشناس"

در باره قانون خطاها هرکسی اعتقادی دارد.

آزمونگر آن را یک نظریه ریاضی می‌داند

و ریاضیدان آن را یک واقعیت تجربی

"لیپمن"

فرض ما در این کتاب این است که یک آزمایش کامل نیست

تا زمانی که تحلیل عدم قطعیت، نتایج نهایی اندازه‌گیری گزارش

شده، انجام شود.

کتاب سخنرانی‌هایی در فیزیک، جلد اول-صفحه ۱. فاینمن

با توجه به اهمیت بین‌المللی قابلیت ردیابی استانداردهای ملی اندازه‌گیری، کمیته بین‌المللی

اوزان و مقیاس‌ها (CIPM) در سال ۱۹۷۷ از دفتر بین‌المللی اوزان و مقیاس‌ها (BIPM) درخواست

کرد تا راهنمایی با همکاری آزمایشگاه‌های ملی اندازه‌شناسی به منظور هماهنگی در برآورد عدم

قطعیت، تهیه کند. بدین منظور BIPM کار گروهی به نام "بیان عدم قطعیت" را متشکل از

کارشناسان ۱۱ کشور تشکیل داد. این کارگروه مدرک (۱۹۸۰) INC-1 را با عنوان "بیان عدم

قطعیت تجربی" تهیه نمود که در سال ۱۹۸۱ به تصویب CIPM رسید.

CIPM به منظور پذیرش جهانی، سند تهیه شده را به سازمان بین‌المللی استاندارد (ISO)

ارجاع داد و ISO گروه مشورتی فنی در اندازه‌شناسی یا TAG-4 را تشکیل داد. اعضای این گروه از

سازمان‌های بین‌المللی مرتبط با اندازه‌شناسی تشکیل می‌شد که عبارت بودند از: OIML, IEC,

JUPAC, JUPAP, IFCC, ISO و BIPM. TAG-4 کار گروه WG-3 را به منظور بررسی راهنمای بیان عدم قطعیت بر اساس سندی که کار گروه BIPM با نام INC-1 (1980) تهیه شده بود، تشکیل داد. این راهنما درصدد تهیه اصول بیان عدم قطعیت اندازه‌گیری بود که در آزمایشگاه‌های (تأیید صلاحیت شده) کالیبراسیون که خدمات اندازه‌شناختی ارائه می‌کنند، مورد استفاده قرار گیرد. علاوه بر این، اهدافی را نیز در بر داشت که عبارتند از:

الف) ارائه راهکارهای برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری؛

ب) تهیه اصول مقایسه‌های بین‌المللی نتایج اندازه‌گیری.

در سال ۱۹۹۳، راهنمای بیان عدم قطعیت در اندازه‌گیری (GUM) توسط ISO منتشر شد. این راهنما در سال ۱۹۹۵ با اندک تغییراتی مجدداً توسط ISO انتشار یافت. در حال حاضر GUM، مورد پذیرش جامعه جهانی اندازه‌شناسی قرار گرفته است و در تمام کشورها به عنوان مرجع اصلی در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری بکار می‌رود. به طور کلی ساختار اولیه GUM از ۹ فصل و ۱۰ پیوست، به شرح زیر تشکیل شده بود:

فصل ۰- مقدمه؛

فصل ۱- هدف و دامنه کاربرد؛

فصل ۲- اصطلاحات و تعاریف؛

فصل ۳- مفاهیم پایه؛

فصل ۴- برآورد عدم قطعیت استاندارد؛

فصل ۵- محاسبه عدم قطعیت مرکب؛

فصل ۶- محاسبه عدم قطعیت گسترده؛

فصل ۷- گزارش عدم قطعیت؛

فصل ۸- خلاصه روش اجرایی برآورد و بیان عدم قطعیت؛

پیوست ۱- توصیه‌های گروه کاری CIPM؛

پیوست ۲- اصطلاحات عمومی اندازه‌شناسی؛

پیوست ۳- مفاهیم و اصطلاحات عمومی آماری؛

پیوست ۴- مقدار واقعی، خطا و عدم قطعیت؛

پیوست ۵- توصیه‌های INC-1؛

پیوست ۶- راهنمای عملی برآورد مؤلفه‌های عدم قطعیت؛

پیوست ۷- درجه آزادی و سطح اطمینان؛

پیوست ۸- مثال‌ها؛

پیوست ۹- واژه‌ها و اختصارات؛

پیوست ۱۰- کتابنامه.

در سال ۱۹۹۷، مسئولیت به روز رسانی و نگهداری از GUM و همچنین واژه‌نامه بین‌المللی اصطلاحات پایه و عمومی در اندازه‌شناسی (VIM) از ISO/TAG-4 به کمیته‌ی جدیدی به نام کمیته‌ی مشترک برای راهنماها در اندازه‌شناسی (JCGM) واگذار شد. JCGM از دو کارگروه تشکیل شده است: کارگروه ۱ که وظیفه‌اش ترویج و توسعه GUM و کارگروه ۲ که وظیفه‌اش ترویج و توسعه VIM است.

مفاهیم اصلی GUM

درستی اندازه‌گیری، بیانگر کیفیت اندازه‌گیری است و بر هزینه‌های اندازه‌گیری تأثیر مستقیم دارد. در واقع درستی یک ویژگی ایجابی برای اندازه‌گیری محسوب می‌شود؛ اما برای بیان آن از ویژگی سلبی "عدم درستی" استفاده می‌شود. اصولاً عدم درستی به صورت بازه‌ای از اعداد بیان می‌شود که در آن، انحراف ممکن نتیجه‌ی اندازه‌گیری از مقدار اندازه ده نشان داده می‌شود. این بازه از طریق روش‌های احتمالاتی به دست می‌آید و آن را عدم قطعیت اندازه‌گیری می‌نامند. در مواردی، این بازه با استفاده از حدود خطاهای مجاز دستگاه اندازه‌گیری مورد استفاده، تعیین می‌شود که در این حالت به این بازه، حدود خطای اندازه‌گیری گفته می‌شود.

GUM روشی استاندارد برای بیان عدم قطعیت اندازه‌گیری‌ها پیشنهاد می‌کند و در برآورد عدم قطعیت، مجموعه‌ی کاملی از اطلاعات را با هم ترکیب می‌کند. GUM این برآورد را با روش‌های آماری کلاسیک (روش A) و سایر روش‌ها (روش B) انجام می‌دهد. این راهنما در روش A از آمار کلاسیک برای محاسبه مؤلفه‌های عدم قطعیت استفاده می‌کند؛ اما تفسیر عدم قطعیت مرکب بر اساس آمار بیزین^۱ صورت می‌پذیرد. این مورد یک ناسازگاری برای GUM محسوب می‌شود.

GUM در برآورد عدم قطعیت مرکب از قانون انتشار عدم قطعیت‌های مربوط به کمیت‌های ورودی استفاده می‌نماید. یکی از معایب این روش این است که مشخصات کاملی از توزیع نتایج اندازه‌گیری و عدم قطعیت مرکب آن‌ها ارایه نمی‌کند. بنابراین همیشه امکان محاسبه ضریب پوشش صحیح برای بازه عدم قطعیت گسترده وجود ندارد. در GUM، ضریب پوشش با این فرض که توزیع نتایج اندازه‌گیری نرمال است و یا بر اساس توزیع t و درجه آزادی مؤثر که از رابطه‌ی Welch-satterthwaite محاسبه می‌گردد تعیین می‌شود. مطابق یک توافق عمومی مقدار ضریب پوشش عدد ۲ است. اگر توزیع نتایج اندازه‌گیری و عدم قطعیت اندازه‌گیری آن به طور کامل محاسبه نشود،

1- Bayesian statistics

دو برابر عدم قطعیت استاندارد می‌تواند کمینه احتمال پوشش برای توزیع احتمال فرض شود. GUM بر اساس معادله اندازه‌گیری (مدل ریاضی) بنا شده است. معادله‌ی اندازه‌گیری توصیفی ریاضی از فرآیند مورد استفاده در اندازه‌گیری است. نتیجه‌ی اندازه‌گیری با قرار دادن کمیت‌های ورودی (برآورد شده) در معادله اندازه‌گیری تعیین می‌شود. عدم قطعیت‌های مقادیر ورودی، مؤلفه‌های عدم قطعیت نتیجه‌ی اندازه‌گیری را تشکیل می‌دهند. بعضی از مؤلفه‌های عدم قطعیت از تأثیرات تصادفی و برخی از تأثیرات سیستماتیک ناشی می‌شوند. با پیشرفت علم اندازه‌گیری و طراحی بهتر تجهیزات اندازه‌گیری، عدم قطعیت مربوط به اثرات تصادفی، کاهش قابل ملاحظه‌ای یافته است. قبل از انتشار GUM رویکرد مورد توافقی در محاسبه عدم قطعیت‌های مربوط به اثرات سیستماتیک وجود نداشت. در بند ۳-۲، راهنمای GUM پیشنهاد زیر ارائه شده است:

در صورتی که خطای سیستماتیک معلوم باشد، نتیجه‌ی اندازه‌گیری را تصحیح کنید. عدم قطعیت تصحیح‌های به کار رفته برای اثرات سیستماتیک را تعیین نمایید. ممکن است بعضی و یا تمام تصحیح‌ها صفر و یا قابل صرف‌نظر کردن باشند؛ اما عدم قطعیت آن‌ها چنین نباشد. GUM رویکرد یکسانی برای عدم قطعیت‌های حاصل از اثرات سیستماتیک و تصادفی دارد.

همانگونه که اشاره شد، GUM دو روش A و B را برای برآورد مؤلفه‌های عدم قطعیت به رسمیت می‌شناسد. عدم قطعیت‌های نوع A نیاز به ترکیب با عدم قطعیت‌های نوع B دارند تا عدم قطعیت مرکب تعیین شود. قبل از انتشار GUM، نحوه ترکیب این عدم قطعیت‌ها به موضوع غامضی در اندازه‌شناسی تبدیل شده بود. این مسئله در GUM با عدم تمایز بین مؤلفه‌های نوع A و B حل شد. باید اشاره کرد که همیشه نمی‌توان به راحتی روش‌های برآورد را به روش‌های A و B تقسیم نمود (بند ۳-۳-۳ GUM) و هنوز از این موضوع تعبیر مختلفی ارائه می‌شود.

مروری بر راهنمای GUM

- این راهنما، برای برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری، ۸ مرحله معرفی می‌کند که عبارتند از:
 - (۱) رابطه‌ی اندازه ده Y و کمیت‌های ورودی X_i را به صورت ریاضی بیان کنید؛ یعنی، $Y = f(X_1, \dots, X_n)$ این تابع را معادله اندازه‌گیری می‌نامند؛
 - (۲) x_i (مقدار برآورد شده‌ی X_i) بر اساس روش‌های آماری و یا غیره تعیین کنید؛
 - (۳) عدم قطعیت استاندارد $U(x_i)$ هر کمیت را به دست آورید؛
 - (۴) مشخص کنید که آیا مقادیر ورودی به هم وابسته‌اند؟ در این صورت ضریب همبستگی را تعیین کنید؛

(۵) نتیجه‌ی اندازه‌گیری y را با استفاده از معادله اندازه‌گیری Y و برای مقادیر ورودی x_i

محاسبه کنید بنابراین $y=f(x_1, \dots, x_n)$ ؛

۶) عدم قطعیت استاندارد مرکب $U(y)$ نتیجه اندازه‌گیری y را با استفاده از عدم قطعیت‌های استاندارد و ضرایب همبستگی و قانون انتشار عدم قطعیت تعیین کنید.

$$U^2(y) = \sum_i C_i^2 U^2(x_i) + 2 \sum_{i < j} C_i C_j U(x_i) U(x_j) r(x_i, x_j)$$

که $C_1, \dots, C_n$ مشتقات جزئی Y بر حسب مقادیر برآورد شده‌ی $X_1, \dots, X_n$ ؛ یعنی، $r(x_i, x_j)$ و $x_1, \dots, x_n$ ضریب همبستگی بین x_i و x_j برای $i \neq j$ و $i=j=1$ است. ضرایب $C_1, \dots, C_n$ را ضرایب حساسیت گویند؛

۷) عدم قطعیت گسترده را با ضرب عدم قطعیت استاندارد مرکب در فاکتور پوشش k محاسبه کنید. انتخاب k مطابق سطح اطمینان لازم صورت می‌پذیرد. بعضی از اندازه‌شناسان ترجیح می‌دهند که به عدم قطعیت گسترده، گستره‌ی پوشش گویند؛
۸) نتیجه اندازه‌گیری و عدم قطعیت گسترده را گزارش دهید.

ویرایش جدید GUM

بررسی‌ها نشان می‌دهد که روش‌های برآورد در GUM، فقط برای مدل‌های خطی یا خطی شده کاربرد دارد و در مواردی نتایج رضایت‌بخشی به همراه ندارد. به منظور تصحیح این محدودیت‌ها، متمم شماره ۱، GUM تهیه و توزیع گردید. با توجه به این که این تصحیحات باید در خود GUM اعمال گردد و نه به صورت متمم، در اکتبر سال ۲۰۰۶ در کارگروه JCCM، بازنگری GUM به تصویب رسید.

یکی از فرضیات بنیادی و اساسی GUM، این است که به مقدار واقعی اندازه ده، به دلیل مشابهت آن با مفهوم مقدار اندازه‌ده، نیازی نیست. به این فرضیه در صفحه ۳۲ و پیوست D، GUM پرداخته شده است. مطابق بند ۱۸.۱، VIM مقداری که به اندازه ده اختصاص می‌یابد از ضرب یک عدد در یکای اندازه‌گیری تشکیل می‌شود، در حالی که مقدار واقعی کاملاً مفهومی نظری و غیرقابل دسترسی است (بند ۱۹.۱، VIM). بنابراین عبارت مقدار واقعی و مقدار اندازه ده را نباید مشابه هم در نظر گرفت و به جای هم بکار برد. علاوه بر این در آمار، واژه‌های پارامتر (مقدار واقعی) و برآورد پارامتر (مقدار به دست آمده‌ی پارامتر) کاملاً از هم قابل تفکیک‌اند. در فیزیک روابط بین کمیت‌های فیزیکی بدون مفهوم مقدار واقعی غیرممکن می‌باشند. در واقع معادلات فیزیکی همواره برای مقادیر کمیت‌های به دست آمده، تقریباً درستند.

حذف عبارت "مقدار واقعی" به حذف واژه "خطا" منجر می‌شود. در GUM، به جای واژه‌ی خطا از واژه "عدم قطعیت" استفاده می‌شود. طبق بند ۳.۹، VIM، واژه عدم قطعیت به نتیجه‌ی اندازه‌گیری مربوط می‌شود، لذا از آن در مواردی مانند خطای دستگاه اندازه‌گیری نمی‌توان استفاده نمود، پس به طور کلی به کار بردن این واژه به جای خطا اشتباه است. علاوه بر این، GUM دو روش نوع A و نوع B در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری تعریف می‌کند (بندهای ۲.۳.۲ و ۳.۳.۳). اما از آن‌ها به عنوان مولفه‌های عدم قطعیت استفاده می‌کند. در بند ۲.۱.۵ چگونگی ترکیب عدم قطعیت‌های نوع A و B ارایه شده است. در این وضعیت به وضوح با عدم قطعیت‌های نوع A و B به صورت مولفه‌های عدم قطعیت رفتار شده که می‌تواند یک ناسازگاری در متن GUM باشد. شاید بهتر بود از عبارت «خطای تصادفی به جای "عدم قطعیت نوع A" و "خطای اسمی" به جای "عدم قطعیت نوع B" استفاده می‌شد.

علی‌رغم این که اکثر اندازه‌گیری‌های صنعت و تجارت اندازه‌گیری‌های ساده‌ای هستند با این وجود در ویرایش جدید GUM اندازه‌گیری‌های چندگانه هم اضافه شده‌اند. در حقیقت GUM بیشتر یک راهنمای عملی است تا یک رساله‌ی علمی. ساختار GUM جدید را می‌توان به دو بخش عمده‌ی زیر تقسیم کرد:

بخش اول: اندازه‌گیری‌های ساده که به دو قسمت تقسیم می‌شود:

الف- اندازه‌گیری‌های ساده مستقیم؛

ب- اندازه‌گیری‌های ساده غیرمستقیم.

بخش دوم: اندازه‌گیری‌های چندگانه که به سه قسمت تقسیم می‌شود:

- اندازه‌گیری‌های چندگانه مستقیم؛

- اندازه‌گیری‌های چندگانه مستقیم وابسته؛

- اندازه‌گیری‌های چندگانه غیرمستقیم غیروابسته.

اصول کلی برآورد عدم قطعیت در GUM

روش‌های مورد استفاده در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری، در موارد زیر کاربرد دارد:

(۱) اندازه‌گیری‌های مستقیم که در آن مقدار کمیت مستقیماً با اندازه‌گیری به دست می‌آید و

برای آن از روابط و معادلات ریاضی استفاده نمی‌شود؛

(۲) اندازه‌گیری‌های چند متغیری که در آن مقدار کمیت از طریق اندازه‌گیری بیش از یک

کمیت حاصل می‌شود؛

(۳) سیستم‌های اندازه‌گیری که در آن مقدار کمیت از طریق اندازه‌گیری‌های یک سیستم با

چندین مؤلفه حاصل می‌شود.

جنبه‌های مهمی که در برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری باید در نظر داشت عبارتند از:

الف- شناسایی خطاهای فرآیند اندازه‌گیری؛

ب- مدل‌های مورد استفاده برای خطاها؛

ج- توابع توزیع خطاها.

اگر مدل مورد استفاده به شکل $x = x_{ture} + \varepsilon_x$ باشد، در این صورت:

$$U_x = \sqrt{\text{var}(x)} = \sqrt{\text{var}(x_{ture} + \varepsilon_x)} = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_x)}$$

اگر مدل مورد استفاده به شکل: $x = x_{ture} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$ باشد در این صورت:

$$U_x = \sqrt{\text{var}(x_{ture} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_1) + \text{var}(\varepsilon_2) + 2\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2)}$$

$$\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \rho_{1,2} U_1 U_2 \quad \rho_{12} = \varepsilon_1, \varepsilon_2 \quad \text{ضریب همبستگی برای}$$

$$u_1 = \sqrt{\text{cov}(\varepsilon_1)}, \quad u_2 = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_2)}$$

$$u_x = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2\rho_{1,2}u_1u_2}$$

گستره تغییرات $\rho_{1,2}$ از -۱ تا +۱ است.

$$\rho_{1,2} = 0$$

برای خطاهایی که از نظر آماری مستقل‌اند.

$$\rho_{1,2} = 1$$

عدم قطعیت‌ها جمع می‌شوند.

$$\rho_{1,2} = -1$$

عدم قطعیت‌ها کم می‌شوند.

الف- شناسایی فرآیند اندازه‌گیری و خطاهای آن

کمیت فیزیکی مورد اندازه‌گیری (اندازه ده) یا با اندازه‌گیری مستقیم و یا اندازه‌گیری‌های چند

متغیری حاصل می‌شود. در حالت چند متغیری تعیین رابطه‌ی ریاضی کمیت‌ها مهم است.

$q=f(x,y,z)$. در این وضعیت توصیف مراحل مختلف اندازه‌گیری، تأثیر شرایط محیطی، اطلاعات

فنی دستگاه‌ها، استانداردهای اندازه‌گیری و ... مهم است. این اطلاعات در برآورد عدم قطعیت و

شناسایی خطاهای فرآیند، مورد استفاده قرار می‌گیرد.

ب- مدل خطا

هر مدل خطا، یک عبارت جبری است که خطای کل مقدار کمیت را بر حسب مولفه‌های خطا یا فرآیندهای اندازه‌گیری مرتبط بیان می‌کند. به عنوان مثال:

$$\varepsilon_q = c_x \varepsilon_x + c_y \varepsilon_y + c_z \varepsilon_z$$

$$c_x = \left(\frac{\partial q}{\partial x} \right), c_y = \left(\frac{\partial q}{\partial y} \right), c_z = \left(\frac{\partial q}{\partial z} \right)$$

رابطه‌ی بین کمیت مورد اندازه‌گیری x و خطای اندازه‌گیری ε_x به صورت زیر می‌باشد:

$$x = x_{true} + \varepsilon_x$$

ε_x برابر است با مجموع خطاهای فرآیند اندازه‌گیری:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots, \varepsilon_k$$

اندیس‌ها، خطاهای مختلف فرآیند اندازه‌گیری را نشان می‌دهند.

ب- شناسایی خطاهای اندازه‌گیری

خطاهای فرآیند اندازه‌گیری، مؤلفه‌های تحلیل عدم قطعیت را تشکیل می‌دهند. معمولاً خطاها از منابع زیر ناشی می‌شوند اما فقط به این موارد محدود نمی‌شوند.

- استانداردهای مرجع؛

- تکرارپذیری؛

- تفکیک‌پذیری؛

- کاربر؛

- شرایط محیطی؛

- محاسبات.

در GUM، عدم قطعیت اندازه‌گیری برابر است با ریشه‌ی دوم واریانس خطا، یک جنبه مهم از فرآیند تحلیل عدم قطعیت این واقعیت است که خطاهای اندازه‌گیری می‌توانند با توزیع احتمال مشخص شوند. این حقیقت با اصل زیر بیان می‌شود.

اصل ۱- خطاهای اندازه‌گیری، متغیرهای تصادفی هستند که از توزیع احتمالی پیروی می‌کنند.

توزیع احتمال برای یک نوع خطای اندازه‌گیری، یک توصیف ریاضی مربوط به فراوانی وقوع آن مقادیر است. توزیع خطا شامل توزیع نرمال، یکنواخت (مستطیلی)، U شکل، مثلثی و دوزنقه‌ای است؛ اما، فقط به موارد بالا محدود نمی‌شود.

توزیع خطا به ما می‌گوید که آیا خطا یا گستره‌ای از خطاها، به احتمال زیاد رخ می‌دهد، یا بعید است که رخ دهد. ضمناً توزیع خطا یک توصیف ریاضی از احتمال اطمینان در تجربه‌ی ما به مقادیر مشخص است.

واریانس به عنوان میانگین مربع پراکندگی از مقدار متوسط تعریف می‌شود. اگر متغیر x از یک توزیع احتمال تحت عنوان تابع چگالی احتمال $f(x)$ پیروی کند، میانگین مربع پراکندگی یا واریانس پراکندگی برابر است با:

$$\text{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mu_x)^2 f(x) dx$$

$$\varepsilon_x = x - \mu_x$$

$$\text{var}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon_x^2 f[x(\varepsilon_x)] d\varepsilon_x = \text{var}(\varepsilon_x)$$

مطابق این رابطه، اگر کمیت x یک متغیر تصادفی از یک جامعه آماری اندازه‌گیری باشد، در این صورت واریانس x همان واریانس خطای x است.

اصل ۲- عدم قطعیت اندازه‌گیری ریشه دوم واریانس، خطای اندازه‌گیری است.

این اصل ارتباطی بین خطای اندازه‌گیری و عدم قطعیت اندازه‌گیری برقرار می‌کند. اگر x مقدار اندازه‌گیری باشد در این صورت:

$$\begin{aligned} u(x) &= \sqrt{\text{var}(x)} \\ &= \sqrt{\text{var}(\varepsilon_x)} \\ &= u(\varepsilon_x) \end{aligned}$$

اصل ۳- عدم قطعیت مقدار اندازه‌گیری شده با عدم قطعیت خطای اندازه‌گیری برابر است. اصل ۳، به همراه اصل ۱ و ۲، اجازه می‌دهد تا محاسبه و ترکیب عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری از طریق موارد زیر انجام شود:

الف) توجه به آن چه که در انجام اندازه‌گیری به آن اطمینان داریم؛
ب) اجازه توسعه مدل‌های عدم قطعیت اندازه‌گیری مربوط به هر گونه اندازه‌گیری پیچیده.

قانون جمع واریانس‌ها در اندازه‌گیری مستقیم

فرض کنید که کمیت تحت اندازه‌گیری به صورت $x = x_{true} + \varepsilon_x$ باشد. همچنین فرض کنید که خطای کل شامل مولفه‌های زیر باشد:

$$\varepsilon_x = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k = \sum_{i=1}^k \varepsilon_i$$

با استفاده از قانون جمع واریانس برای ε_x داریم:

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_x) &= \text{var}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \dots + \varepsilon_k) \\ &= \text{var}(\varepsilon_1) + \text{var}(\varepsilon_2) + \dots + \text{var}(\varepsilon_k) + 2\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) + \\ &\quad 2\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_3) + \dots + 2\text{cov}(\varepsilon_{k-2}, \varepsilon_k) + 2\text{cov}(\varepsilon_{k-1}, \varepsilon_k) \\ &= \sum_{i=1}^k \text{var}(\varepsilon_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j) \end{aligned} \quad (1)$$

که $\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)$ ، کوواریانس بین خطاهای فرآیند اندازه‌گیری است.

قانون جمع واریانس، مدل کلی

حال به بررسی یک حالت کلی در قانون جمع واریانس می‌پردازیم. فرض کنید که کمیت Z به صورت زیر تعریف شود.

$$Z = ax + by$$

x و y کمیت‌های اندازه‌گیری شده و a و b ضرایب ثابت هستند. با استفاده از رابطه

$$x = x_{true} + \varepsilon_x$$

داریم.

$$Z = a(x_{true} + \varepsilon_x) + b(y_{true} + \varepsilon_y)$$

$$Z = ax_{true} + by_{true} + a\varepsilon_x + b\varepsilon_y = Z_{true} + \varepsilon_z$$

که در آن:

$$Z_{true} = ax_{true} + by_{true}$$

$$\varepsilon_z = a\varepsilon_x + b\varepsilon_y$$

واریانس ε_x به صورت زیر می‌باشد:

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_x) &= \text{var}(a\varepsilon_x + b\varepsilon_y) \\ &= a^2 \text{var}(\varepsilon_x) + b^2 \text{var}(\varepsilon_y) + 2ab \text{cov}(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \end{aligned}$$

آخرین عبارت، کوواریانس بین ε_x و ε_y است. با توجه به اصل ۲، $\text{var}(\varepsilon_z)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} \text{var}(\varepsilon_z) &= u_{\varepsilon z}^2 \\ &= a^2 u_{\varepsilon x}^2 + b^2 u_{\varepsilon y}^2 + 2ab \text{cov}(\varepsilon_x, \varepsilon_y) \end{aligned} \quad (2)$$

$u_{\varepsilon y}$ و $u_{\varepsilon x}$ به ترتیب عدم قطعیت‌ها در ε_x و ε_y می‌باشند.

همبستگی خطاها، اندازه‌گیری مستقیم

اگر دو متغیر ε_1 و ε_2 با تابع چگالی احتمال و مشترک $f(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$ توصیف شوند، در این صورت واریانس ε_1 و ε_2 با رابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$\text{cov}(\varepsilon_1, \varepsilon_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} d\varepsilon_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \varepsilon_1 \varepsilon_2 f(\varepsilon_1, \varepsilon_2) d\varepsilon_2$$

کوواریانس دو متغیر تصادفی یک ارزیابی آماری از وابستگی متقابل آن‌ها است. از آن جا که واریانس می‌تواند ابعاد فیزیکی نامناسبی داشته باشد، به ندرت از آن‌ها استفاده می‌شود. به جای آن از ضریب همبستگی $\rho_{\varepsilon_i \varepsilon_j}$ - که به صورت زیر تعریف شده است - استفاده می‌شود.

$$\rho_{\varepsilon_i \varepsilon_j} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{\sqrt{\text{var}(\varepsilon_i) \text{var}(\varepsilon_j)}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_i, \varepsilon_j)}{u_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_j}}$$

u_{ε_i} و u_{ε_j} -i-امین و -j-امین عدم قطعیت‌های فرآیند اندازه‌گیری می‌باشند. با ضریب

همبستگی، می‌توان به ارزیابی همبستگی دو متغیر تصادفی اقدام نمود. ضریب همبستگی عدد بدون بعدی است؛ که بین ۱ و -۱ می‌باشد. با توجه به اصل ۲، رابطه (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$u_{\varepsilon_x}^2 = \sum_{i=1}^k \text{var}(\varepsilon_i) + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \rho_{\varepsilon_i \varepsilon_j} u_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_j}$$

$$= \sum_{i=1}^k u_{\varepsilon_i}^2 + 2 \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k \rho_{\varepsilon_i \varepsilon_j} u_{\varepsilon_i} u_{\varepsilon_j}$$

بنابراین ضریب همبستگی برای ε_x و ε_y به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\rho_{\varepsilon_x \varepsilon_y} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_x, \varepsilon_y)}{u_{\varepsilon_x} u_{\varepsilon_y}}$$

همچنین رابطه (۲) برابر خواهد شد با:

$$u_{\varepsilon_x}^2 = a^2 u_{\varepsilon_x}^2 + b^2 u_{\varepsilon_y}^2 + 2ab \rho_{\varepsilon_x \varepsilon_y} u_{\varepsilon_x} u_{\varepsilon_y}$$

این رابطه به طور کلی به k کمیت اندازه‌گیری شده با مولفه‌های خطای $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_k$ مربوط می‌شود.

$$\text{var}\left(\sum_{r=1}^k a_r \varepsilon_r\right) = \sum_{r=1}^k a_r^2 \text{var}(\varepsilon_r) + 2 \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{q=r+1}^k a_r a_q \rho_{\varepsilon_r \varepsilon_q} u_{\varepsilon_r} u_{\varepsilon_q}$$

$$= \sum_{r=1}^k a_r^2 u_{\varepsilon_r}^2 + 2 \sum_{r=1}^{k-1} \sum_{q=r+1}^k a_r a_q \rho_{\varepsilon_r \varepsilon_q} u_{\varepsilon_r} u_{\varepsilon_q} \quad (3)$$

u_{ε_r} و u_{ε_q} ، عدم قطعیت‌های کل r -امین و q -امین مولفه خطا و $\rho_{\varepsilon_r \varepsilon_q}$ همبستگی بین این مولفه‌های خطا است.

هر مولفه‌ی خطا، از خطاهای فرآیند اندازه‌گیری مانند اریبی مرجع اندازه‌گیری، تکرارپذیری، خطای تفکیک‌پذیری و غیره تشکیل شده است. از این رو، ε_r به صورت زیر تجزیه می‌شود:

$$\varepsilon_r = \varepsilon_{r,1} + \varepsilon_{r,2} + \dots + \varepsilon_{r,\ell}$$

ℓ مقدار خطاهای فرآیند اندازه‌گیری را نشان می‌دهد.

ضریب همبستگی متقابل بین خطاهای فرآیند اندازه‌گیری برای منابع خطا $\varepsilon_{r,i}$ و $\varepsilon_{q,j}$ - که با $\rho_{\varepsilon_{r,i}\varepsilon_{q,j}}$ نشان داده می‌شود- برابر است با:

$$\rho_{\varepsilon_{r,i}\varepsilon_{q,j}} = \frac{\text{cov}(\varepsilon_{r,i}, \varepsilon_{q,j})}{u_{\varepsilon_{r,i}} u_{\varepsilon_{q,j}}}$$

امین مولفه خطا هستند و q -امین و i به ترتیب عدم قطعیت‌های فرآیند اندازه‌گیری $\varepsilon_{q,j}$ و $\varepsilon_{r,i}$

$$u_{\varepsilon_{r,i}} = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_{r,i})}$$

با توجه به رابطه (۳)، ضریب همبستگی برای u_{ε_r} و u_{ε_q} برابر است با:

$$\rho_{\varepsilon_r, \varepsilon_q} = \frac{1}{u_{\varepsilon_r} u_{\varepsilon_q}} \sum_{i=1}^l \sum_{j=1}^m \rho_{\varepsilon_{r,i} \varepsilon_{q,j}} u_{\varepsilon_{r,i}} u_{\varepsilon_{q,j}} \quad (۴)$$

به طوری که تعداد کل عدم قطعیت‌های فرآیند برای r -امین و q -امین کمیت‌های اندازه‌گیری شده به ترتیب برابر با ℓ و m است. این رابطه نشان می‌دهد که ضریب همبستگی ρ_{rqij} ، همبستگی متقابل بین عدم قطعیت‌های فرآیند اندازه‌گیری برای r -امین و q -امین مولفه‌ی خطا محسوب می‌شود.

عدم قطعیت مرکب

به طور کلی قانون جمع واریانس، یک رویکرد منطقی در محاسبه‌ی عدم قطعیت مرکب فراهم می‌کند که برای همبستگی بین منابع خطا در نظر گرفته شده است. با توجه به روابط (۳) و (۴)، عدم قطعیت کل به صورت زیر بیان می‌شود:

$$U_T = \sqrt{\sum_{r=1}^k a_r^2 u_{\varepsilon_r}^2 + 2 \sum_{r=1}^{k-1} a_r^2 \sum_{q=r+1}^k a_q \sum_{i=1}^{\ell} \sum_{j=1}^m \rho_{\varepsilon_{r,i} \varepsilon_{q,j}} u_{\varepsilon_{r,i}} u_{\varepsilon_{q,j}}}$$

از معادله بالا می‌توان حدس زد که عدم قطعیت‌ها همیشه به صورت ریشه‌ی مجموع مربعات نیستند.

ایجاد همبستگی‌ها

برای ارزیابی اثرات خطاهای همبسته در عدم قطعیت مرکب، اندازه‌گیری کمیت x و منابع خطا ε_1 و ε_2 را در نظر بگیرید.

$$x = x_{true} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2$$

با توجه به اصول ۲ و ۳ و قانون جمع واریانس، عدم قطعیت x به صورت زیر حاصل می‌شود:

$$u_x = \sqrt{\text{var}(x_{true} + \varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sqrt{\text{var}(\varepsilon_1 + \varepsilon_2)} = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2\rho_{1,2}u_1u_2}$$

مقدار ضریب همبستگی $\rho_{1,2}$ با دو منبع خطا در گستره ۱- تا ۱+ قرار دارد.

اگر دو منبع خطا از نظر آماری مستقل از هم باشند، در این صورت $\rho_{1,2} = 0$ و $u = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$. بنابراین، عدم قطعیت‌های منابع خطا مستقل آماری به روش ریشه‌ی مجموع مربعات، ترکیب می‌شوند.

اگر $\rho_{1,2} = 1$ باشد در این صورت :

$u_x = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + 2u_1u_2} = \sqrt{(u_1 + u_2)^2} = u_1 + u_2$ ، بنابراین عدم قطعیت‌ها به صورت خطی، ترکیب می‌شوند و منابع خطا کاملاً همبسته هستند.

اگر منابع خطا کاملاً همبسته باشند و همدیگر را جبران کنند در این صورت $\rho_{1,2} = -1$ بوده و $u_x = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 - 2u_1u_2} = \sqrt{(u_1 - u_2)^2} = |u_1 - u_2|$ و اختلاف بین عدم قطعیت‌ها خواهد بود.

به طور معمول همبستگی بین خطاهای اندازه‌گیری برای هر کمیتی، مشخص نیست در کل، بهتر است فرض شود هیچ همبستگی بین خطاهای فرآیند اندازه‌گیری به شرح زیر وجود ندارد:

- تکرارپذیری و ویژگی اریبی مرجع $(\rho_{ran,bias} = 0)$
- تکرارپذیری و اریبی کاربر $(\rho_{ran,bias} = 0)$
- ویژگی اریبی مرجع و خطای تفکیک‌پذیری $(\rho_{bias,res} = 0)$
- ویژگی اریبی مرجع و اریبی کاربر $(\rho_{bias,oper} = 0)$
- اریبی کاربر و خطای عوامل محیطی $(\rho_{oper,env} = 0)$

$$(\rho_{res, enr} = 0)$$

- خطای تفکیک‌پذیری و خطای عوامل محیطی

$$(\rho_{res, oper} = 0)$$

- خطای تفکیک‌پذیری دیجیتالی و ارببی کاربر

ارزیابی نوع A عدم قطعیت اندازه‌گیری

در بیشتر موارد یک اندازه‌دهه مانند Y به‌طور مستقیم اندازه‌گیری نمی‌شود و با N کمیت دیگر $X_1, X_2, \dots, X_N$ و از طریق یک تابع ریاضی تعیین می‌شود:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N)$$

در یک سری از مشاهدات، مقدار k -امین مشاهده از X_i با $X_{i,k}$ نمایش می‌شود، در نتیجه اگر بزرگی مقاومتی R باشد، مقدار k -امین مشاهده مقاومت با R_k نماد سازی می‌شود. تخمین X_i (به بیان دقیق، امید ریاضی آن) با X_i نشان داده می‌شود.

مثال: اگر اختلاف پتانسیل V به دو سر یک مقاومت وابسته به دما، که دارای مقاومت R_0 در دمای تعریف شده t_0 و ضریب دمائی مقاومتی α است، اعمال شود، توان p (اندازه‌دهه) تلف شده بوسیله مقاومت در دمای t طبق رابطه زیر بستگی به R_0, V, α و t دارد:

$$P = f(V, R_0, \alpha, t) = V^2 / R_0 [1 + \alpha (t - t_0)]$$

کمیت‌های ورودی $X_1, X_2, \dots, X_N$ - که کمیت خروجی Y به آنها بستگی دارد- هر کدام خودشان می‌توانند به‌عنوان اندازه‌دهه در نظر گرفته شوند و به کمیت‌های دیگر شامل تصحیح‌ها و ضرایب تصحیح برای اثرهای سیستماتیک، بستگی داشته باشد، که بدین وسیله به یک رابطه پیچیده‌ی f - که ممکن است به هیچ روی نتوان آن را بطور کامل نوشت- بیانجامد. افزون بر آن، f می‌تواند بطور تجربی تعیین شود و یا فقط به صورت یک نمودار درختی (الگوریتم) که باید بطور عددی ارزیابی شود وجود داشته باشد. بنابراین، اگر داده‌ها نشان دهد که f ، اندازه‌گیری را با معیار مورد نیاز الگوسازی نمی‌کند، در این صورت باید کمیت‌های ورودی بیشتری را شامل شود تا این مشکل برطرف شود. این موضوع ممکن است نیازمند معرفی یک کمیت ورودی باشد تا ناکافی بودن آگاهی از پدیده‌ای را که بر اندازه‌دهه اثر می‌گذارد، منعکس نماید. به عنوان مثال برای در نظر گرفتن یک توزیع دمای غیریکنواخت معلوم در یک مقاومت ممکن است، یک ضریب دمایی مقاومت غیر خطی محتمل، یا یک وابستگی محتمل کمیت‌های ورودی به فشار اتمسفری لازم شود.

مجموعه‌ای از کمیت‌های ورودی $X_1, X_2, \dots, X_N$ را می‌توان بصورت زیر دسته‌بندی کرد: کمیت‌هایی که مقادیر و عدم قطعیت آن‌ها مستقیماً در جریان اندازه‌گیری تعیین می‌شود. این مقادیر و عدم قطعیت‌ها ممکن است؛ برای مثال، از یک تک مشاهده یا قضاوت بر مبنای تجربه به‌دست آید و ممکن است تعیین تصحیح‌های قرائت دستگاه و تصحیح‌های کمیت‌های اثرگذار، نظیر دمای محیط، فشار اتمسفری و رطوبت را نیز شامل شود.

عدم قطعیت کمیت‌هایی می‌تواند از منابع خارجی به اندازه‌گیری اضافه شود، نظیر کالیبراسیون استانداردهای اندازه‌گیری، مواد مرجع گواهی شده و داده‌های مرجع حاصل از کتاب‌های مرجع.

برآورد اندازه‌دهی Y - که با y نمایش داده می‌شود - توسط معادله (۱) و با استفاده از برآورد ورودی‌های $x_1, x_2, \dots, x_N$ بازاء مقادیر N کمیت $X_1, X_2, \dots, X_N$ حاصل می‌شود. بنابراین برآورد خروجی y ، که نتیجه‌ی اندازه‌گیری است با رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N)$$

در برخی موارد می‌توان تخمین y را از رابطه زیر به‌دست آورد:

$$y = \bar{Y} = 1/n \sum_{k=1}^n Y_k = 1/n \sum_{k=1}^n f(X_{1,k}, X_{2,k}, \dots, X_{N,k})$$

یعنی، y میانگین حسابی یا متوسط n اندازه‌گیری مستقل (Y_k) در نظر گرفته می‌شود. هر اندازه‌گیری عدم قطعیتی دارد و بر مجموعه‌ای کامل از مقادیر مشاهده شده N کمیت ورودی X_i حاصل در همان زمان، استوار است. این روش میانگین‌گیری، به‌جای $y = f(\bar{X}_1, \bar{X}_2, \dots, \bar{X}_N)$ است، که در آن $\bar{X}_i = (\sum_{k=1}^n X_{i,k})/n$ میانگین حسابی مشاهدات $X_{i,k}$ است، اگر f تابع غیرخطی از کمیت‌های ورودی $X_1, X_2, \dots, X_N$ باشد بهتر است، اما اگر f تابع خطی از X_i باشد هر دو راهکار یکسان هستند.

انحراف معیار مربوط به برآورد خروجی یا نتیجه اندازه‌گیری y ، که عدم قطعیت استاندارد مرکب نامیده می‌شود $u_c(y)$ ، از انحراف معیار وابسته به هر برآورد ورودی x_i ، که عدم قطعیت استاندارد نامیده شده و با $u(x_i)$ نشان داده می‌شود، تعیین می‌شود.

تخمین هر ورودی x_i و عدم قطعیت استاندارد وابسته به آن $u(x_i)$ از یک توزیع مقادیر محتمل کمیت ورودی X_i به‌دست می‌آید. این تابع احتمال می‌تواند براساس فراوانی؛ یعنی،

مبتنی بر مجموعه‌ای از مشاهدات $X_{i,k}$ از X_i ، یا یک توزیع پیشینی یا مقدماتی^۱ باشد. ارزیابی نوع A مؤلفه‌های عدم قطعیت استاندارد بر توزیع فراوانی‌ها بنا شده است، در حالی که ارزیابی نوع B بر توزیع‌های مقدماتی.

ارزیابی نوع A عدم قطعیت استاندارد

در بیشتر موارد، بهترین تخمین در دسترس امید ریاضی یا مقدار مورد انتظار μ_q از کمیت q که به‌طور تصادفی تغییر می‌کند و برای آن n مشاهده مستقل q_k در شرایط یکسان اندازه‌گیری به‌دست آمده باشد، میانگین حسابی یا متوسط $\bar{q}$ ، n مشاهده است.

$$\bar{q} = 1/n \cdot \sum_{k=1}^n q_k$$

بنابراین، بازاء یک کمیت ورودی X_i برآورد شده از n مشاهده مستقل تکرار شده $X_{i,k}$ ،

میانگین حسابی $\bar{X}_i$ - که از معادله فوق به‌دست می‌آید - به‌عنوان تخمین ورودی x_i در معادله (۲) برای تعیین نتیجه اندازه‌گیری y به‌کار می‌رود؛ یعنی، $x_i = \bar{X}_i$. برآورد ورودی‌هایی را که از مشاهدات تکراری ارزیابی نمی‌شوند باید از روش‌های دیگری، به‌دست آورد. مقدار q_k به‌دلیل تغییرات تصادفی در کمیت‌های اثرگذار، یا اثرهای تصادفی متفاوت هستند. واریانس تجربی مشاهدات، که واریانس (σ^2) توزیع احتمال q را تخمین می‌زند با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$s^2(q_k) = 1/(n-1) \cdot \sum_{k=1}^n (q_k - \bar{q})^2$$

ریشه‌ی دوم واریانس برآورد شده $s(q_k)$ ، انحراف معیار تجربی نامیده می‌شود و تغییرپذیری مقادیر مشاهده شده q_k در اطراف میانگین $\bar{q}$ را مشخص می‌کند. بهترین برآورد واریانس، واریانس میانگین است که بارابطه‌ی زیر مشخص می‌شود:

$$s^2(\bar{q}) = s^2(q_k) / n$$

1- priori

بنابراین انحراف معیار تجربی میانگین، تعیین می‌کند که چگونه $\bar{q}$ می‌تواند مقدار مورد انتظار q را برآورد کند و می‌تواند بعنوان معیار عدم قطعیت $\bar{q}$ به کار رود.

بنابراین، بازای کمیت ورودی X_i که از روی n مشاهده تکرار شده مستقل $X_{i,k}$ تعیین می‌شود، عدم قطعیت استاندارد $u(x_i)$ تخمین آن $x_i = \bar{X}_i$ برابر است با: $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ که $s^2(\bar{X}_i)$ از معادله فوق محاسبه می‌شود. برای سهولت، گاهی اوقات $u^2(x_i) = s^2(\bar{X}_i)$ و $u(x_i) = s(\bar{X}_i)$ به ترتیب واریانس نوع A و عدم قطعیت استاندارد نوع A نامیده می‌شود. لازم به توضیح است که n ؛ یعنی، تعداد مشاهدات باید به اندازه کافی بزرگ باشد تا اطمینان دهد که $\bar{q}$ برآورد قابل اعتمادی از متغیر تصادفی q بوده و این که $s^2(\bar{q})$ می‌تواند برآورد قابل اعتمادی از واریانس $\sigma^2(q) = \sigma^2 / n$ ارائه دهد.

اگرچه واریانس $s^2(\bar{q})$ کمیت اساسی‌تری است، ولی انحراف معیار $s(\bar{q})$ به دلیل این که از نظر ابعادی مشابه q می‌باشد و مقدار آن نسبت به مقدار واریانس خیلی آسان‌تر فهمیده می‌شود، در عمل کاربرد بیشتری دارد.

در ارزیابی‌های نوع A درجه‌ی آزادی ν_i مربوط به $u(x_i)$ ، برابر با $n-1$ است و از n مشاهده مستقل محاسبه می‌شود و باید همیشه مشخص شود.

ارزیابی عدم قطعیت استاندارد نوع A نمی‌تواند شامل تمام جزئیات لازم باشد. وضعیت‌های پیچیده‌ای وجود دارد، که می‌تواند با روش‌های آماری دیگری مورد بررسی قرار گیرد. یک مثال مهم عبارت است از انجام برخی از کالیبراسیون‌ها با روش حداقل مربعات، که در ارزیابی عدم قطعیت‌های ناشی از تغییرات تصادفی کوتاه مدت و بلند مدت در نتایج مقایسه سنج‌های مادی با اندازه‌های نامعلوم، نظیر بلوک‌های سنج و وزنه‌ها، با استانداردهای مرجع بکار می‌رود. در چنین وضعیت‌های اندازه‌گیری نسبتاً ساده، مؤلفه‌های عدم قطعیت را می‌توان با تحلیل آماری داده‌های به‌دست آمده از طراحی‌های شامل اندازه‌گیری‌های پیاپی بهم مرتبط^۱ اندازه‌ده برای تعدادی از مقادیر مختلف کمیت‌هایی که بر آن بنا شده است و اصطلاحاً تحلیل واریانس نامیده می‌شود، ارزیابی کرد.

ارزیابی نوع B عدم قطعیت استاندارد

بازای هر برآورد x_i از کمیت ورودی X_i - که با تکرار مشاهدات به‌دست نیامده باشد - واریانس برآورد وابسته به آن $u^2(x_i)$ یا عدم قطعیت استاندارد $u(x_i)$ به کمک داوری علمی مبتنی بر

1- nested sequences of measurements

تمام اطلاعات در دسترس از تغییرپذیری محتمل X_i ارزیابی می‌شود. مجموعه اطلاعات می‌تواند شامل موارد زیر باشد:

- داده‌های اندازه‌گیری قبلی؛
 - تجربه یا آگاهی کلی از رفتار و خواص مواد و دستگاه‌های مربوط؛
 - مشخصات سازنده؛
 - داده‌های ارائه شده در کالیبراسیون و سایر گواهی‌نامه‌ها؛
 - عدم قطعیت‌های تعیین شده برای داده‌های مرجع اخذ شده از کتاب‌های مرجع.
- $u(x_i)$ و $u^2(x_i)$ که بدین طریق ارزیابی می‌شوند گاهی به ترتیب، واریانس نوع B و عدم قطعیت استاندارد نوع B نامیده می‌شوند.

ارزیابی عدم قطعیت استاندارد نوع B مستلزم بصیرت مبتنی بر تجربه و دانش کلی است و این مهارتی است که با تجربه حاصل می‌شود. باید تأکید کرد که ارزیابی عدم قطعیت استاندارد نوع B مانند ارزیابی نوع A می‌تواند قابل اعتماد باشد، بویژه در اندازه‌گیری‌هایی که ارزیابی نوع A بر تعداد نسبتاً کمی از مشاهده‌های مستقل آماری استوار باشد.

اگر در برآورد x_i از مشخصات سازنده، گواهی کالیبراسیون، کتب مرجع، یا سایر منابع استفاده شود و عدم قطعیت ذکر شده مضرب خاصی از یک انحراف معیار باشد، عدم قطعیت استاندارد $u(x_i)$ به سادگی عبارت است از مقدار ذکر شده تقسیم بر آن ضریب، و مجذور آن با واریانس تخمین زده شده $u^2(x_i)$ برابر است.

مثال: یک گواهی کالیبراسیون بیان می‌کند که جرم m_s یک وزنه استاندارد از جنس فولاد زنگ نزن با مقدار نامی یک کیلوگرم برابر با $۱۰۰۰/۰۰۰۳۲۵$ گرم و عدم قطعیت این مقدار $۲۴۰ \mu g$ در سطح سه انحراف معیار است. بنابراین عدم قطعیت مقدار جرم استاندارد به سادگی برابر است با $u(m_s) = (۲۴۰ \mu g)/۳ = ۸۰ \mu g$ این مقدار با عدم قطعیت استاندارد نسبی $u(m_s)/m_s$ برابر با ۸۰×10^{-9} مطابقت می‌کند. واریانس برآورد شده عبارت است از $u^2(m_s) = (۸۰ \mu g)^2 = ۶/۴ \times 10^{-9}$ به شکل مضربی از انحراف معیار بیان شود. به جای آن، لازم نیست عدم قطعیت ذکر شده x_i به شکل مضربی از انحراف معیار بیان شود. به جای آن، ممکن است که عدم قطعیت ذکر شده بازه‌ای با سطح اطمینان ۹۰، ۹۵، یا ۹۹ درصد را تعریف کند. اگر طور دیگری بیان شده باشد، می‌توان فرض کرد که برای محاسبه عدم قطعیت ذکر شده یک توزیع نرمال بکار رفته و عدم قطعیت استاندارد x_i با تقسیم عدم قطعیت ذکر شده بر ضریب مناسبی برای توزیع نرمال به دست می‌آید. ضرایب مطابق با سه سطح اطمینان بالا عبارتند از:

۱/۶۴، ۱/۹۶ و ۲/۵۸

مثال: یک گواهی کالیبراسیون بیان می‌کند که مقاومت استاندارد R_s با مقدار نامی ۱۰ اهم در C ۲۳ برابر است با $129 \mu\Omega \pm 10.00742 \Omega$ و "عدم قطعیت ذکر شده به صورت $129 \mu\Omega$ بازه‌ای با سطح اطمینان ۹۹٪ را پوشش می‌دهد. عدم قطعیت استاندارد مقاومت می‌تواند $u(R_s) = \frac{(129 \mu\Omega)}{\sqrt{2}} = 50 \mu\Omega$ در نظر گرفته شود، که با عدم قطعیت استاندارد نسبی $u(R_s)/R_s$ برابر با 5×10^{-6} مطابقت می‌کند. واریانس تخمین زده شده عبارت است از: $u^2(R_s) = (50 \mu\Omega)^2 = 2.5 \times 10^{-9} \Omega^2$

اگر بر اساس اطلاعات قابل دسترس، بتوان بیان کرد که "شانس پنجاه - پنجاه وجود دارد که مقدار کمیت ورودی X_i در داخل بازه a_- تا a_+ قرار می‌گیرد" - به عبارت دیگر، احتمال این‌که X_i در این بازه قرار گیرد ۵۰٪ یا ۵۰٪ است - و اگر بتوان فرض کرد که توزیع مقادیر محتمل X_i تقریباً نرمال است، آنگاه بهترین تخمین x_i از X_i می‌تواند نقطه میانی بازه باشد. افزون بر آن، اگر نیم‌پهنای بازه با $a = (a_+ - a_-)/2$ نشان داده شود، می‌توان $u(x_i) = 1/48 a$ را برگزید، زیرا برای یک توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ بازه $\mu \pm \frac{\sigma}{\sqrt{48}}$ تقریباً ۵۰٪ توزیع را در بر می‌گیرد.

مثال: مهندسی که ابعاد قطعه‌ای را تعیین می‌کند، تخمین می‌زند که طول قطعه با احتمال ۵۰٪ در بازه ۱۰/۰۷ میلی‌متر تا ۱۰/۱۵ میلی‌متر قرار دارد و گزارش می‌دهد $l = (10.0 \pm 11.04) \text{ mm}$ بدین معنی که $\pm 0.04 \text{ mm}$ بازه‌ای با سطح اطمینان ۵۰٪ را تعریف می‌کند. بنابراین $a = 0.04 \text{ mm}$ ، و اگر برای مقادیر محتمل l یک توزیع نرمال فرض کنیم، عدم قطعیت استاندارد طول عبارت است از $u(l) = 1/48 \times 0.04 \text{ mm} \approx 0.06 \text{ mm}$ و واریانس تخمین زده شده $u^2(l) = (1/48 \times 0.04 \text{ mm})^2 = 3/5 \times 10^{-3} \text{ mm}^2$ می‌باشد.

باتوجه به موضوع فوق، اگر بر اساس اطلاعات قابل دسترس، بتوان گفت که شانس دو سوم وجود دارد که مقدار X_i در داخل بازه a_- تا a_+ قرار گیرد - یعنی احتمال این‌که X_i در این بازه قرار گیرد حدود ۶۷٪ است - بنابراین بطور منطقی می‌توان $u(x_i) = a$ را برگزید، زیرا برای یک توزیع نرمال با میانگین μ و انحراف معیار σ بازه $\mu \pm \sigma$ حدود ۶۸٪ توزیع را در بر می‌گیرد.

فصل هفتم

ارزیابی داده‌های اندازه‌گیری

میان همه‌ی چیزهای قطعی، قطعی
ترینشان تردید است
"برتولت برشت"

در آزمایشگاه‌ها، اندازه‌گیری‌ها با این فرض صورت می‌پذیرد که تجهیزات اندازه‌گیری فاقد هرگونه اریبی هستند. از این رو همه مقادیر اندازه‌گیری شده از مشاهدات تجهیزات اندازه‌گیری-که متعلق به یک توزیع نرمال‌اند- حاصل می‌شوند. به منظور تعیین مقدار یک اندازه‌ده (متغیر خروجی) مشاهدات تجهیزات اندازه‌گیری دریافت و تصحیحات لازم از گواهی کالیبراسیون و سایر عوامل مانند شرایط محیطی (دما، فشار و رطوبت) اعمال می‌شوند. برای ارزیابی کیفیت مقادیر اندازه‌گیری شده، از آزمون‌هایی مانند آزمون گراب، تامسون یا دیکسون استفاده می‌شود. در صورتی که بیش از یک نمونه موجود باشد میانگین هر نمونه برآورد می‌شود. کیفیت واریانس‌های به دست آمده برای نمونه‌های مختلف مورد ارزیابی قرار می‌گیرند. بعد از این اعمال، باید همه‌ی منابع عدم قطعیت شناسایی و سهم هریک به صورت واریانس، همراه با درجه آزادی و ترکیب همه‌ی منابع دخیل محاسبه گردد و در انتها باید نتیجه را به همراه عدم قطعیت اندازه‌گیری بیان نمود.

ارقام معنادار در محاسبات

کاربرد همگانی در استفاده از ماشین‌های حساب و کامپیوترها سبب گشته که از ارقام زیادی در محاسبات استفاده شود. این امر منجر به تجدید نظر در مفهوم ارقام معنادار شده است. استفاده از ارقام معنادار مناسب، از مولفه‌های ضروری در نمایش هم نتایج حاصل از آزمایش و هم حاصل از محاسبات و عدم قطعیت‌های آنها است. تعداد ارقام معنادار چگونه محاسبه می‌شود؟ تعداد ارقام معنادار، تعداد ارقام ما بین کمترین و بیشترین رقم با معناست. عدد غیر صفر سمت چپ، بیشترین

رقم با معنی و عدد سمت راست حتی اگر صفر هم باشد کمترین رقم با معنی خواهد بود. با توجه به این شرایط، اعداد زیر پنج رقم با معنی دارند.

۱/۰۰۰ ، ۲۷۳۴/۲ ، ۵۳۲۶۷ ، ۱۰۱۰۱

اگر عدد اعشاری نباشد و رقم سمت راست هم صفر باشد آیا آن رقم با معناست؟ این وضعیت ابهام دارد و باید آن را به صورت نماد علمی بیان نمود. به عنوان مثال عدد ۴۲۸۹۷۰ را می‌توان به صورت 4.28970×10^5 نوشت. بر اساس قرارداد، همه‌ی ارقام در نوشتار علمی با معناست بنابراین ۶ رقم با معنی داریم.

برای گرد کردن اعداد، ابتدا عدد را به صورت اعشاری می‌نویسیم بسته به این‌که بخش اعشاری کوچکتر، مساوی و یا بزرگتر از ۵ باشد، رقم با معنا تعیین می‌شود. اگر بزرگتر از ۵ باشد یک رقم به کوچکترین رقم با معنا اضافه می‌کنیم و اگر کوچکتر از ۵ باشد از آن صرف نظر می‌کنیم و اگر مساوی ۵ باشد یک رقم به کوچکترین رقم با معنا اضافه می‌کنیم در صورتی‌که رقم فرد باشد. توصیه می‌شود که عمل گرد کردن اعداد را در انتهای محاسبات انجام دهید.

کاربرد نادرست گرد کردن اعداد را همه جا می‌توان مشاهده نمود. در سال ۱۹۸۹ جلوی اتوبوسی در ادینبورگ اسکاتلند نوشته شده بود $3/4290 \text{ m} = 11'30''$ ؛ یعنی، بیشینه‌ی ارتفاع $11'30''$ یا ۱۳۵ اینچ است. این عدد، سه رقم با معنا دارد، بنابراین بیشینه‌ی ارتفاع باید بر حسب متر به صورت $3/43 \text{ m}$ نوشته شود نه $3/4290$ که ۵ رقم با معنا دارد. ، چنانچه بخواهیم $3/4290$ متر صحیح باشد باید در سیستم انگلیسی این مقدار را $11'30''$ می‌نوشتیم.

توصیه می‌شود در گزارشات مربوط به آزمون و کالیبراسیون تعداد ارقام معنادار و قوانین آن‌ها رعایت شود. پیشنهاد می‌شود، نتیجه اندازه‌گیری و عدم قطعیت مربوط به آن با یک یا دو رقم معنادار گزارش شود. به عنوان مثال به جدول زیر توجه نمایید.

پیمت		ارقام معنادار	بالن		ارقام معنادار
۱ ml	± 0.06	۴	۱۰ ml	± 0.02	۴
۲ ml	± 0.06	۴	۲۵ ml	± 0.03	۴
۵ ml	± 0.1	۴	۵۰ ml	± 0.05	۴
۱۰ ml	± 0.2	۳	۱۰۰ ml	± 0.08	۳
۱۵ ml	± 0.3	۳	۲۰۰ ml	± 0.1	۳
۲۰ ml	± 0.3	۳	۲۵۰ ml	± 0.12	۳
۲۵ ml	± 0.3	۳	۱۰۰۰ ml	± 0.3	۳

بیشینه خطای مجاز ظروف حجمی کلاس A

یک پیپت ۱۰ ml به صورت 10.0 ± 0.2 ml با ۳ رقم معنادار بیان می‌شود. در صورتی که یک پیپت ۱ ml با ۴ رقم معنادار و به صورت 1.000 ± 0.006 ml بیان می‌شود. توصیه می‌شود در تعیین تعداد ارقام معنادار از اصول زیر استفاده شود.

الف- در ضرب و تقسیم، تعداد رقم ارقام معنادار نتیجه، برابر با کوچکترین رقم معنادار است.

ب- در جمع و تفریق، تعداد رقم ارقام معنادار نتیجه، برابر با کوچکترین رقم معنادار است

پ- تعداد ارقام معنادار در مانتیس (اعشار) $\log x$ برابر با تعداد ارقام معنادار است. برای $\ln x$ هم چنین است. (در عبارت $-2.3 = \log 4.23 \times 10^{-23}$ ، مانتیس ۰/۳ است).

ت- تعداد ارقام معنادار، 10^x برابر تعداد ارقام معنادار در مانتیس x است. برای e^x هم چنین است.

مثال: ثابت تعادل برای یک واکنش در دمای $298/2$ K برابر 0.32 و در دمای $353/2$ K برابر 0.47 است. $\ln(k_2/k_1)$ را محاسبه کنید.

هر دو ضریب k ، دو رقم معنادار دارند بنابراین، k_2/k_1 نیز باید دو رقم معنادار داشته باشد:

$$k_2/k_1 = 14/69$$

مانتیس $\ln(k_2/k_1)$ دو رقم معنادار دارد بنابراین:

$$\ln(k_2/k_1) = \ln 14.69 = 2.68$$

ارزیابی اعتبار مقادیر کرانه‌ای نتایج اندازه‌گیری

پیش از انجام هرگونه محاسبات، لازم است که اعتبار نتایج حاصل از اندازه‌گیری‌ها تعیین شوند. بیشتر نتایج اندازه‌گیری تصحیح شده تشکیل یک خوشه را می‌دهند اما برخی از مشاهدات در نقاط دورتر از خوشه قرار می‌گیرند. ممکن است بعضی از این مشاهدات مردود باشند. این مقادیر که داده‌های پرت^۱ نامیده می‌شوند با آزمون‌های مختلف آماری قابل شناسایی هستند.

داده پرت

تعاریف مختلفی برای داده‌های پرت ارایه شده است که به سه مورد آن اشاره می‌کنیم:

الف- داده‌های پرت داده‌های غیر قابل توصیفی هستند؛

ب- داده‌های پرت داده‌هایی هستند که نظریه‌ی ما را مردود می‌کنند؛

پ- داده‌های پرت داده‌های نادرستی هستند.

وقتی داده‌های پرت با داده‌های سالم همراه باشند، مقدار میانگین داده‌ها را تحت تاثیر قرار می‌دهد.

1- outlier

دهد. خصوصاً اگر تعداد داده‌ها کم باشد، این تاثیر بیشتر خواهد بود. ضمناً مقادیر پرت تاثیر بسزایی در محاسبه‌ی انحراف معیار دارند. مقادیر پرت همچنین نشان دهنده‌ی اشتباهات و یا عملکرد نادرست سیستم اندازه‌گیری هم هستند و می‌توانند نشانگر این باشند که اقدامات اصلاحی برای بهبود سیستم مورد نیاز است. امروزه این گونه رفتارها را "خارج از کنترل" می‌نامند.

حذف داده‌های پرت

آزمون‌های آماری مختلفی برای حذف داده‌های پرت پیشنهاد شده است. روش‌های زیر در فعالیت‌های آزمایشگاهی، بیشتر مورد استفاده قرار می‌گیرند.

الف- آزمون گراب^۱

ب- آزمون تامسون^۲

آزمون گراب

این آزمون به ترتیب زیر انجام می‌شود:

داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنید؛ $X_1, X_2, X_3, \dots$

داده‌های پرت (X_1 یا X_n یا هر دو) را انتخاب کنید؛

مقادیر میانگین و انحراف معیار مربوط به کل داده‌ها را محاسبه کنید؛

مقدار T را به صورت زیر محاسبه کنید.

اگر X_1 پرت باشد:

$$T = \frac{\bar{X} - X_1}{S}$$

اگر X_n پرت باشد:

$$T = \frac{X_n - \bar{X}}{S}$$

با توجه به سطح اطمینان ۹۵٪، مقدار T را با مقدار بحرانی جدول مقایسه می‌کنیم. اگر T از

مقدار بحرانی بزرگتر باشد مقدار مورد نظر پرت بوده و کنار گذاشته می‌شود.

1- Grub Test
2- Thompson Test

Number of data points, n	Risk of false rejection (%)				
	0.1	0.5	1	5	10
3	1.155	1.155	1.155	1.153	1.148
4	1.496	1.496	1.492	1.463	1.425
5	1.780	1.764	1.749	1.672	1.602
6	2.011	1.973	1.944	1.822	1.729
7	2.201	2.139	2.097	1.938	1.828
8	2.358	2.274	2.221	2.032	1.909
9	2.492	2.387	2.323	2.110	1.977
10	2.606	2.482	2.410	2.176	2.036
15	2.997	2.806	2.705	2.409	2.247
20	3.230	3.001	2.884	2.557	2.385
25	3.389	3.135	3.009	2.663	2.486
50	3.789	3.483	3.336	2.956	2.768
100	4.084	3.754	3.600	3.207	3.017

جدول مقادیر بحرانی آزمون گراب

آزمون تامسون

این آزمون به ترتیب زیر انجام می‌شود:
 داده‌ها را به صورت صعودی مرتب کنید؛
 داده‌های پرت را انتخاب کنید؛
 مقادیر میانگین و انحراف معیار مربوط به کل داده‌ها را محاسبه کنید؛
 قدر مطلق اختلاف بین مقدار پرت و میانگین را در نظر می‌گیریم (T)؛
 مقدار بحرانی متناظر برای سطح اطمینان ۹۵٪ از جدول را تعیین (t)؛
 حاصلضرب ts را به دست آورید.
 اگر T بزرگتر از ts باشد مقدار مورد نظر پرت بوده و کنار گذاشته می‌شود.

جدول مقادیر بحرانی آزمون تامسون

t	n	t	n	t	n
1.896	23	1.840	13	1.150	3
1.899	24	1.849	14	1.393	4
1.902	25	1.858	15	1.572	5
1.904	26	1.865	16	1.656	6
1.906	27	1.871	17	1.711	7
1.908	28	1.876	18	1.749	8
1.910	29	1.881	19	1.777	9
1.911	30	1.885	20	1.798	10
1.913	31	1.889	21	1.815	11
1.914	32	1.893	22	1.829	12

ارزیابی میانگین‌های دو سری نتیجه‌ی اندازه‌گیری

پس از بررسی اعتبار نتایج اندازه‌گیری، از آن‌ها در محاسبه میانگین مقادیر استفاده می‌شود.
 حال به بررسی اعتبار میانگین اندازه‌گیری‌ها می‌پردازیم. تعدادی اندازه‌گیری با میانگین نمونه $\bar{x}$ ،
 در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم بدانیم که آیا این مقادیر به جامعه آماری با میانگین μ و انحراف
 معیار σ تعلق دارند؟ آماره Z را که متعلق به توزیع نرمال $N(0,1)$ است در نظر می‌گیریم. دو حالت
 ممکن است پیش آید.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \quad \text{الف) انحراف معیار } \sigma \text{ جامعه آماری معلوم است در این صورت:}$$

ب) انحراف معیار σ جامعه آماری نامعلوم، اما انحراف معیار نمونه‌ای از این جامعه S است.

$$z = \frac{\bar{x} - \mu}{s / \sqrt{n}}$$

n تعداد اندازه‌گیری‌های مورد استفاده در محاسبه میانگین است. آماره Z به یک توزیع نرمال تعلق دارد. در صورتی که تعداد نمونه‌ها کم باشد، Z به توزیع t تعلق دارد.

مثال: جامعه آماری با میانگین $1/350$ و انحراف معیار 150 مفروض است. اگر میانگین 25 اندازه‌گیری $1/300$ باشد، می‌خواهیم تعلق میانگین این نمونه به جامعه آماری را بررسی نماییم.

$$z = \frac{1/350 - 1/300}{150 / \sqrt{25}} = 50 \times \frac{5}{150} = 1/666$$

برای احتمال $0/05$ ، این مقدار کمتر از 2 است. از این رو می‌توان نتیجه گرفت که میانگین محاسبه شده به جامعه آماری با میانگین $1/350$ و انحراف معیار 150 ، متعلق است و می‌تواند در محاسبات مورد استفاده قرار گیرد.

با انتخاب: $z = \pm 2$

$$\bar{x} = \frac{1}{350} \pm 2 \times \frac{150}{\sqrt{25}} = 1/350 \pm 60$$

به طور کلی:

$$\bar{x} \leq \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

و

$$\bar{x} \geq \mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

یا:

$$\mu - \frac{2\sigma}{\sqrt{n}} \leq \bar{x} \leq \mu + \frac{2\sigma}{\sqrt{n}}$$

مثال: فرض کنید در یک مجموعه از اندازه‌گیری مقاومت الکتریکی، میانگین تعداد بسیار زیادی از اندازه‌گیری‌ها $1/0001350 \Omega$ باشد. اگر $1/0001250 \Omega$ میانگین 16 اندازه‌گیری با انحراف معیار $1/0000160 \Omega$ باشد، تعلق این میانگین به جامعه آماری مورد نظر را بررسی می‌کنیم.

$$z = \frac{1/0.001350 - 1/0.001250}{\frac{1/0.000160}{\sqrt{16}}} = 2/5$$

این مقدار Z ، از ۲ بیشتر است. بنابراین با اطمینان ۵٪ نمی‌توان آن را متعلق به جامعه آماری دانست. مقدار Z برای احتمال ۰.۰۱ برابر ۲.۵۶ است. در این صورت میانگین محاسبه شده را با احتمال ۱٪ می‌توان متعلق به همان جامعه آماری دانست.

دو میانگین به دست آمده از یک منبع

در اغلب موارد، ما مجموعه‌ای از اندازه‌گیری‌ها را -که میانگین آن‌ها $\bar{x}_1$ است- در یک روز مشخص به دست می‌آوریم. با تکرار همان اندازه‌گیری‌ها، تحت شرایط محیطی و تجهیزات مشابه، میانگین $\bar{x}_2$ به دست می‌آید. می‌خواهیم بدانیم که اختلاف معناداری بین این دو میانگین وجود دارد یا اختلاف آن‌ها ناشی از نوسانات آماری است. در این حالت، ممکن است فرض شود که این دو مجموعه به یک جامعه آماری تعلق دارند. پیش از هر اقدامی باید انحراف معیار جامعه آماری را توسط انحراف معیارهای دو نمونه تعیین کنیم.

انحراف معیار دو میانگین

دو سری نتیجه اندازه‌گیری را که تحت شرایط یکسانی به دست آمده‌اند در نظر بگیرید. میانگین و انحراف معیار این دو مجموعه عبارتند از:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{p=1}^{n_1} x_p}{n_1}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{p=1}^{n_2} x_p}{n_2}$$

$$S_1^2 = \sum_{p=1}^{n_1} (x_p - \bar{x}_1)^2 = S_1^2 \nu_1$$

$$S_2^2 = \sum_{p=1}^{n_2} (x_p - \bar{x}_2)^2 = S_2^2 \nu_2$$

n_1 و n_2 تعداد اندازه‌گیری‌ها، v_1 و v_2 درجات آزادی و S_1 و S_2 انحراف معیارهای دو مجموعه است. اشاره شد که اندازه‌گیری‌ها با تجهیزات مشابه و تحت شرایط محیطی یکسان صورت پذیرفته است؛ بنابراین انحراف معیار هر دو مجموعه باید یکسان باشد. بهترین برآورد از انحراف معیار، استفاده از داده‌های هر دو مجموعه است:

$$S_v = \sqrt{\frac{s_1^2 + s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} = \sqrt{\frac{s_1^2 v_1 + s_2^2 v_2}{n_1 + n_2 - 2}}$$

ریشه دوم میانگین وزنی مربع S_1 و S_2 است. انحراف معیار در میانگین به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$\frac{S_v}{\sqrt{n_2}}, \frac{S_v}{\sqrt{n_1}}$$

بنابراین انحراف معیار اختلاف دو میانگین به صورت زیر برآورد می‌شود:

$$S_{vd} = S_v \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

آزمون برای دو میانگین از نمونه‌هایی با اندازه‌های کوچکتر

انحراف معیار اختلاف دو میانگین یعنی $\bar{x}_1 - \bar{x}_2$ با رابطه فوق مشخص می‌شود. با تقسیم این مقدار بر انحراف معیار مرکب، آماره t برای اختلاف دو میانگین همان جامعه آماری حاصل می‌شود.

$$t_{v,d} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_{vd}} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{S_v} \sqrt{\frac{n_1 n_2}{n_1 + n_2}}$$

t_{vd} آماره t است. درجه آزادی $n_1 + n_2 - 2$ می‌باشد. از رابطه فوق t_{vd} را می‌توان تعیین کرد و احتمال متناظر را از جدول توزیع t با درجه آزادی $n_1 + n_2 - 2$ به دست آورد. اگر t_{vd} بیش از t مربوط به احتمال پیش‌بینی شده باشد، در این صورت، فرض بر این است که اختلاف دو میانگین، بیش از حد رواداری است. روش دیگری هم وجود دارد که درصد احتمال رواداری را مشخص می‌کند و مقدار متناظر t_{vd} را برای درجه آزادی $n_2 + n_1 - 2$ تعیین می‌کند. اگر مقدار محاسبه شده بیش از مقدار t به دست آمده از جدول باشد، در این صورت اختلاف بین دو میانگین با توجه

به نوسانات آماری نرمال، بیش از حد بزرگ در نظر گرفته می‌شود. با این حال، اگر t_{vd} کمتر از مقدار جدول شود، اختلاف بین این دو میانگین فقط می‌تواند از نوسانات آماری باشد. به طور معمول جداول t برای سطحی است که β_{tp} را شامل می‌شود. از این رو، P_t برای t_{vd} داده شده برابر است با:

$$P_t = \frac{1 - \beta_{tp}}{2}$$

مقدار P_t معمولاً ۰/۰۵ انتخاب می‌شود. اگر مقدار t_{vd} از مقدار t مربوط به احتمال ۰/۰۵ کمتر باشد، در این صورت اختلاف دو میانگین به دلیل نوسانات آماری نرمال است و این دو میانگین با هم سازگارند و اگر بین مقادیر t مربوط به P_t های ۰/۰۵ و ۰/۰۱ قرار داشته باشد در سازگاری آنها باید احتیاط کنیم. اگر مقدار محاسبه شده t_{vd} بیش از مقدار t مطابق با P_t مربوط به ۰/۰۱ باشد، در این صورت دو میانگین ناسازگارند. به عبارت دیگر اختلاف میانگین‌ها به اندازه‌ای زیاد است که می‌توان گفت یکی از میانگین‌ها نادرست است، اما از این روش نمی‌توان میانگین نادرست را تشخیص داد. تنها گزینه‌ی موجود در تعیین میانگین نادرست، اخذ یک سری اندازه‌گیری دیگر و تعیین میانگین آن و مقایسه با دو میانگین موجود و انتخاب میانگین‌های سازگار است.

انحراف معیار و میانگین، دو میانگین

در صورت وجود میانگین‌های سازگار، سوالی که پیش می‌آید نحوه‌ی ترکیب میانگین و انحراف معیارهای این دو سری اندازه‌گیری است. فرض کنید دو مجموعه نتیجه‌ی اندازه‌گیری به صورت زیر داشته باشیم:

$$\bar{x}_1 = \frac{\sum_{p=1}^{n_1} x_{1p}}{n_1}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{\sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}}{n_2}$$

میانگین مرکب $\bar{x}$ به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{\sum_{p=1}^{n_1} x_{1p} + \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}}{n_1 + n_2}$$

$$\bar{x} = \frac{n_1 \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2}{n_1 + n_2}$$

واریانس مرکب s_c^2 به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$s_c^2 = \frac{\sum_{p=1}^{n_1} (x_{1p} - \bar{x})^2 + \sum_{p=1}^{n_2} (x_{2p} - \bar{x})^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

رابطه فوق را می‌توان به صورت زیر ساده نمود:

$$\begin{aligned} & \sum_{p=1}^{n_1} x_{1p}^2 + n_1 \bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{p=1}^{n_1} x_{1p} + \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}^2 + n_2 \bar{x}^2 - 2\bar{x} \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p} \\ &= \sum_{p=1}^{n_1} x_p^2 + \sum_{p=1}^{n_2} x_p^2 + (n_1 + n_2) \bar{x}^2 - 2\bar{x} \left\{ \sum_{p=1}^{n_1} x_p + \sum_{p=1}^{n_2} x_p \right\} \\ &= \sum_{p=1}^{n_1} x_{1p}^2 + \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}^2 + (n_1 + n_2) \bar{x}^2 - 2\bar{x} \{ (n_1 + n_2) \bar{x} \} \\ &= \sum_{p=1}^{n_1} x_{1p}^2 + \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}^2 - (n_1 + n_2) \bar{x}^2 \end{aligned}$$

s_1^2 و s_2^2 به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$v_1 s_1^2 = \sum_{p=1}^{n_1} x_{1p}^2 - n_1 \bar{x}_1^2$$

$$v_2 s_2^2 = \sum_{p=1}^{n_2} x_{2p}^2 - n_2 \bar{x}_2^2$$

با قراردادن این مقادیر در رابطه فوق، داریم:

$$v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 + n_1 \bar{x}_1^2 + n_2 \bar{x}_2^2 - (n_1 + n_2) \bar{x}^2 = v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 + n_1 \bar{x}_1^2 +$$

$$n_2 \bar{x}_2^2 - \frac{(n_1 + \bar{x}_1 + n_2 \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2} = v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 - \frac{n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2}$$

بنابراین واریانس مرکب s_c^2 به صورت زیر ساده می‌شود.

$$s_c^2 = \frac{v_1 s_1^2 + v_2 s_2^2 - n_1 n_2 (\bar{x}_1 - \bar{x}_2)^2}{n_1 + n_2 - 2}$$

مثال: فرض کنید میانگین‌های دو سری اندازه‌گیری وزنه یک کیلوگرمی با تجهیزات مشابه $۱۰۰۰/۰۰۰۱۱$ و $۱۰۰۰/۰۰۰۱۰۳$ گرم و انحراف معیارها $۰/۰۰۰۰۳$ و $۰/۰۰۰۰۶$ گرم باشد. اولین میانگین حاصل ۱۵ اندازه‌گیری و دومین میانگین حاصل ۱۰ اندازه‌گیری است.

$$s_v = \left\{ \frac{۰/۰۰۳^2 \times ۱۴ + ۰/۰۰۶^2 \times ۹}{۱۵ + ۱۰ - ۲} \right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{ (۰/۰۱۲۶ + ۰/۰۳۲۴) / ۲۳ \right\}^{\frac{1}{2}} = ۰/۰۴۴۲۳$$

$$s_{vd} = \frac{۰/۰۴۴۲۳}{\left(\frac{1}{۱۰} + \frac{1}{۱۵} \right)^{\frac{1}{2}}} = ۰/۰۱۸۰۵۶$$

بنابراین:

$$t_{vd} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_r}{s_{vd}} = \frac{۰/۰۰۷}{۰/۰۱۸۰۵۶} = ۰/۳۸۸$$

$$v_d = ۱۰ + ۱۵ - ۲ = ۲۳$$

با توجه به جدول t ، برای ۲۳ درجه آزادی (۲۵ تا ۲۰)، t با احتمال $۰/۰۵$ ، $۱/۷۲۴۷$ برای $v=۲۰$ و $۱/۷۰۸۱$ برای $v=۲۵$ است. مشاهده می‌شود که t_{vd} از این دو مقدار کوچکتر است از این رو، میانگین‌ها با هم سازگارند. بنابراین از میانگین وزنی این دو میانگین در برآورد جرم وزنه تحت آزمون می‌توان استفاده کرد.

$$\bar{x} = \frac{(15 \times 1000 / 000103 \pm 10 \times 1000 / 000110)}{15 + 10} = 1000 / 000106 g$$

نکته‌ی قابل توجه اختلاف انحراف معیارها با نسبت ۲:۱ است. جهت بررسی همگنی آن‌ها، آزمون فیشر را انجام می‌دهیم.

$$F = \frac{(\cdot / 00006)^2}{(\cdot / 00003)^2} = 4$$

مقدار F برای درجه آزادی ۹ و ۱۴ و $P_t = 0/01$ و $P_t = 0/05$ برای $P_t = 0/01$ است. با توجه به بزرگی F محاسبه شده از مقدار مربوط به $0/01$ ، انحراف معیارها همگن به نظر نمی‌رسند و با سازگاری میانگین‌ها، تناقض دارد. از آن جایی که S_1 و S_2 در مخرج t_{vd} است مقادیر بزرگ انحراف معیارها، باعث کوچک‌تر شدن t_{vd} می‌شود و میانگین‌ها سازگار می‌شوند. بنابراین پیشنهاد می‌شود پیش از پذیرش سازگاری میانگین‌ها، آزمون F برای سازگاری انحراف معیارها صورت پذیرد.

آزمون دو میانگین حاصل از منابع مختلف

اغلب، آزمایشگاه‌های مختلف پارامتر مشابهی از یک شیء، مانند جرم وزنه استاندارد سیار را تعیین می‌کنند. هر آزمایشگاهی، میانگین و انحراف معیار اندازه‌گیری‌های خود را اعلام می‌کند و لزومی ندارد که با انحراف معیار جامعه آماری یکسان باشد. در این حالت میانگین $\bar{x}$ به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$\bar{x} = \frac{\frac{\bar{x}_1}{s_1^2 / n_1} + \frac{\bar{x}_2}{s_2^2 / n_2}}{\frac{1}{s_1^2 / n_1} + \frac{1}{s_2^2 / n_2}}$$

یا:

$$\bar{x} = \frac{n_1 s_2^2 \bar{x}_1 + n_2 s_1^2 \bar{x}_2}{n_1 s_2^2 + n_2 s_1^2} \quad (1)$$

در واقع $\bar{x}$ ، میانگین وزنی $\bar{x}_1$ و $\bar{x}_2$ با فاکتورهای وزنی: $\frac{1}{s_1^2 / n_1}, \frac{1}{s_2^2 / n_2}$ است. این فاکتورها، عکس واریانس‌های مربوط به هر میانگین است. انحراف معیار مرکب به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$s_{vd} = \left(\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2} \right)^{1/2}$$

به منظور ارزیابی نزدیکی دو میانگین، آماره t به صورت زیر انتخاب می‌شود:

$$t_{vd} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{s_{vd}}$$

یا:

$$t_{vd} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{\left(s_1^2 / n_1 + s_2^2 / n_2 \right)^{1/2}}$$

در این حالت، درجه آزادی موثر به صورت $n_1 + n_2 - 2$ نخواهد بود بلکه باید از رابطه‌ی Welch- satterthwaite محاسبه شود.

$$\frac{1}{v_{eff}} = \frac{\sum_{p=1}^n \frac{s_p^4}{v_p}}{\left(\sum_{r=1}^n s_p^2 \right)^2}$$

اگر $\frac{s_1^2}{n_1}$ و $\frac{s_2^2}{n_2}$ را واریانس‌های هر میانگین در نظر بگیریم، درجه‌ی آزادی موثر به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$v_{eff} = \frac{\left(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2 \right)^2}{\frac{n_2^2 s_1^4}{n_1} + \frac{n_1^2 s_2^4}{n_2}}$$

ادامه آزمون مشابه قبل است. اگر t_{vd} کمتر از آماره t با احتمال 0.05 باشد با اطمینان می‌توان فرض کرد که نزدیکی دو میانگین به هم در حدی است که آن‌ها را می‌توان سازگار در نظر گرفت. در این صورت میانگین مرکب با رابطه (۱) تعیین می‌شود. انحراف معیار میانگین وزنی به صورت زیر مشخص می‌گردد.

$$\frac{1}{s^2} = \frac{n_1}{s_1^2} + \frac{n_2}{s_2^2}$$

مثال: یک گیج ساعتی در دو آزمایشگاه و با تجهیزات مختلف مورد اندازه‌گیری قرار گرفته و نتایج زیر حاصل شده است.

میانگین	۱۰۰۰/۰۱۴ mm	۱۰۰۰/۰۵۴ mm
انحراف معیار	۰/۰۳۲ mm	۰/۰۷۴ mm
تعداد اندازه‌گیری‌ها	۱۱	۱۶

$$t_{vd} = \frac{\bar{x}_1 - \bar{x}_2}{(s_1^2/n_1 + s_2^2/n_2)^{\frac{1}{2}}} = \frac{1000/0.14 - 1000/0.54}{\left(\frac{0.032^2}{11} + \frac{0.074^2}{16}\right)^{\frac{1}{2}}} = \frac{0.04}{0.02086} = 1/917$$

درجه آزادی موثر U_{eff} برابر است با:

$$U_{eff} = \frac{(n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2)^2}{\frac{n_1^2 s_1^4}{n_1} + \frac{n_2^2 s_2^4}{n_2}} = \frac{(16 \times 0.032^2 + 11 \times 0.074^2)^2}{16^2 \times 0.032^4 + 11^2 \times 0.074^4} = \frac{5870/624}{268/493} = 21/86$$

با ۲۰ درجه آزادی مقدار t برای $P_t = 0.05$ ، $P_t = 0.01$ و برای $P_t = 0.05$ ، $P_t = 0.01$ است. مقدار t_{vd} محاسبه شده بین مقادیر t برای $P_t = 0.05$ و $P_t = 0.01$ است. پس دو میانگین می‌توانند با ملاحظات سازگار در نظر گرفته شوند.

مقایسه انحراف معیارهای مربوط به دو مجموعه نتیجه اندازه‌گیری

این مبحث را با اعتبار خود مشاهدات آغاز کردیم و سپس به میانگین عددی پرداختیم و با واریانس به پایان می‌بریم. برای تأیید سازگاری دو سری نتیجه اندازه‌گیری که نزدیکی میانگین‌ها بررسی شده، می‌توان نسبت واریانس‌های دو مجموعه را هم ارزیابی نمود. به این منظور آماره F که برابر است با نسبت واریانس‌های دو مجموعه، در نظر گرفته می‌شود.

$$s_1 = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{n_1} (x_{1r} - \bar{x}_1)^2}{n_1 - 1}}$$

$$s_2 = \sqrt{\frac{\sum_{r=1}^{n_2} (x_{2r} - \bar{x}_2)^2}{n_2 - 1}}$$

$$F = \frac{s_1^2}{s_2^2}$$

اگر مقدار F از مقدار مربوط به احتمال 0.05 جدول کمتر باشد، دو واریانس برابر و دو مجموعه سازگار در نظر گرفته می‌شود. اگر مقدار F بین مقادیر مربوط به احتمال 0.05 و احتمال 0.01 قرار گیرد با احتیاط می‌توان دو مجموعه را سازگار در نظر گرفت و در صورتی که F بزرگتر از مقدار مربوط به احتمال 0.01 باشد دو مجموعه ناسازگارند.

در جداولی که مقدار F را مشخص می‌کنند، n معمولاً برابر است با: (درجه آزادی - U). مقادیر درجه‌ی آزادی به صورت زیر می‌باشد:

$$v_1 = n_1 - 1 \quad \text{و} \quad v_2 = n_2 - 1$$

مقدار v_1 در جدول همیشه به واریانس صورت کسر و v_2 به واریانس مخرج کسر F اطلاق می‌شود. واریانس صورت همیشه بزرگتر از واریانس مخرج است.

مثال: دو آزمایشگاه، گزارش زیر را برای اندازه‌گیری ولتاژ ۱۰ ولتی ارائه نموده‌اند.

آزمایشگاه ۲	آزمایشگاه ۱	
۰/۵ mV	۰/۲ mV	انحراف معیار
۱۱	۱۶	تعداد اندازه‌گیری‌ها

برای ارزیابی سازگاری انحراف معیارها، آماره F را تعیین می‌کنیم.

$$F = \frac{0/5^2}{0/2^2} = \frac{0/25}{0/4} = 6/25$$

مقدار F برای $P_t=0/01$ و درجه آزادی ۱۰ و ۱۵، ۳/۸۰ است. مقدار محاسبه شده بزرگتر از حتی مقدار F مربوط به $P_t=0/01$ است. بنابراین این دو انحراف معیار ناسازگارند.

فصل هشتم

مثال‌ها

به منظور نشان دادن کاربرد اصول ارائه شده در ارزیابی و بیان عدم قطعیت اندازه‌گیری، مثال‌هایی ارائه می‌شود. چون این مثال‌ها جنبه‌ی آموزشی دارند، بنا به ضرورت ساده شده‌اند. همچنین، چون این مثال‌ها و داده‌های عددی بکار رفته در آنها اساساً برای نمایش اصول برآورد عدم قطعیت اندازه‌گیری انتخاب شده‌اند، بنابراین نه مثال‌ها و نه داده‌ها لزوماً نباید به عنوان اندازه‌گیری‌های کاملاً واقعی تفسیر شوند.

مثال ۱ کالیبراسیون بلوک سنج

طول یک بلوک سنج با اندازه اسمی ۵۰ mm در مقایسه با یک استاندارد معلوم با همان طول تعیین می‌شود. خروجی مستقیم مقایسه دو بلوک سنج اختلاف d در طول آنهاست.

$$d = l(1 + \alpha\theta) - l_s(1 + \alpha_s\theta_s)$$

l عبارت است از اندازه ده، یعنی، طول بلوک سنج مورد کالیبراسیون در 20°C
 l_s عبارت است از طول استاندارد در 20°C همانگونه که در گواهی‌نامه کالیبراسیون آن آمده است.

α و α_s ، به ترتیب، عبارتند از ضرایب انبساط گرمایی بلوک مورد کالیبراسیون و بلوک استاندارد.

θ و θ_s ، به ترتیب، عبارتند از انحراف‌های دما از دمای مرجع 20°C مربوط به بلوک و استاندارد.

اندازه‌ده با رابطه زیر نشان داده می‌شود:

$$l = \frac{l_s(1 + \alpha_s \theta_s) + d}{(1 + \alpha \theta)} = l_s + d + l_s(\alpha_s \theta_s - \alpha \theta) + \dots$$

اگر اختلاف دما بین بلوک سنج مورد کالیبراسیون و استاندارد به صورت $\delta\theta = \theta - \theta_s$ ، و اختلاف در ضرایب انبساط گرمایی آنها بصورت $\delta\alpha = \alpha - \alpha_s$ نوشته شود، معادله‌ی فوق بصورت زیر بیان می‌شود:

$$l = f(l_s, d, \alpha_s, \theta, \delta\alpha, \delta\theta) = l_s + d - l_s[\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta\theta]$$

برآورد می‌شود $\delta\theta$ و $\delta\alpha$ - و نه عدم قطعیت آن‌ها - صفر باشد و فرض می‌شود که α_s ، $\delta\alpha$ و $\delta\theta$ و θ ناهمبسته باشند. (اگر اندازه‌ده برحسب متغیرهای θ_s ، θ ، α_s و α بیان شده بود، لزوماً باید همبستگی بین θ و θ_s ، و بین α و α_s را شامل شود.)

بنابراین از این معادله برمی‌آید که برآورد مقدار اندازه‌ده l را می‌توان از عبارت ساده $l_s + \bar{d}$ به دست آورد، که l_s عبارت است از طول استاندارد در 20°C - همانطوری که در گواهینامه کالیبراسیون آن آمده است - و $\bar{d}$ توسط میانگین حسابی $n=5$ مشاهده تکرار شده مستقل، برآورد می‌شود. عدم قطعیت استاندارد مرکب l ، $u_c(l)$ ، به صورت زیر به دست می‌آید:

چون فرض شده است که $\delta\alpha = 0$ و $\delta\theta = 0$ ، بنابراین:

$$u_c^2(l) = c_s^2 u^2(l_s) + c_d^2 u^2(d) + c_{\alpha_s}^2 u^2(\alpha_s)$$

$$+ c_\theta^2 u^2(\theta) + c_{\delta\alpha}^2 u^2(\delta\alpha) + c_{\delta\theta}^2 u^2(\delta\theta)$$

$$c_s = \partial f / \partial l_s = 1 - (\delta\alpha \cdot \theta + \alpha_s \cdot \delta\theta) = 1$$

$$c_d = \partial f / \partial d = 1$$

$$c_{\alpha_s} = \partial f / \partial \alpha_s = -l_s \delta\theta = 0$$

$$c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta\alpha = 0$$

$$c_{\delta\alpha} = \partial f / \partial \delta\alpha = -l_s \theta$$

$$c_{\delta\theta} = \partial f / \partial \delta\theta = -l_s \alpha_s$$

و بنابراین:

$$u_c^2(l) = u^2(l_s) + u^2(d) + l_s^2 \theta^2 u^2(\delta\alpha) + l_s^2 \alpha_s^2 u^2(\delta\theta)$$

عدم قطعیت کالیبراسیون استاندارد، $u(l_s)$

گواهینامه کالیبراسیون، عدم قطعیت گسترده استاندارد را $U = 0.075 \mu m$ با ضریب پوشش $k = 3$ گزارش کرده است. پس عدم قطعیت استاندارد عبارت است از:

$$u(l_s) = (0.075 \mu m) / 3 = 25 nm$$

عدم قطعیت اختلاف طول اندازه‌گیری شده، $u(d)$

انحراف معیار ادغام شده که مقایسه l و l_s را مشخص می‌کند از تغییرپذیری ۵ مشاهده مستقل تعیین می‌شود و برابر $13 nm$ است. بنابراین عدم قطعیت استاندارد وابسته به میانگین حسابی این قرائت‌ها عبارت است از:

$$u(\bar{d}) = s(\bar{d}) = (13 nm) / \sqrt{5} = 5.8 nm$$

طبق گواهینامه کالیبراسیون دستگاه مقایسه‌گر مورد استفاده برای مقایسه l با l_s ، عدم قطعیت آن "در اثر خطاهای تصادفی" در سطح اطمینان ۹۵ درصد براساس تکرار ۶ اندازه‌گیری عبارت است از: $\pm 0.01 \mu m$ ؛ بنابراین عدم قطعیت استاندارد با استفاده از ضریب t بازای درجه آزادی $5 = 6 - 1$ ، $v = 5$ ، $t_{95}(5) = 2.57$ عبارت است از:

$$u(d_1) = \frac{(0.01 \mu m)}{2.57} = 3.9 nm$$

عدم قطعیت مقایسه‌گر "در اثر خطاهای سیستماتیک" در گواهینامه با "سطح 3σ " برابر $0.02 \mu m$ داده شده است. بنابراین عدم قطعیت استاندارد آن را می‌توان به صورت زیر در نظر گرفت:

$$u(d_2) = (0.02 \mu m) / 3 = 6.7 nm$$

سهم کل از مجموع واریانس‌های برآورد شده به دست می‌آید:

$$u^2(d) = u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) = 93 nm^2$$

یا:

$$u(d) = 9.7 nm$$

عدم قطعیت ضریب انبساط گرمایی، $u(\alpha_s)$

ضریب انبساط گرمایی بلوک سنجه استاندارد به صورت $\alpha_s = 11/5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ که با عدم قطعیتی با یک توزیع مستطیلی و حدود $\pm 2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$ نمایش داده می‌شود، بیان شده است. پس عدم قطعیت استاندارد عبارت است از:

$$u(\alpha_s) = (2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}) / \sqrt{3} = 1/2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$$

چون $c_{\alpha_s} = \partial f / \partial \alpha_s = -l_s \delta \theta = 0$ این عدم قطعیت در عدم قطعیت مرتبه اول l سهم نیست.

عدم قطعیت انحراف از دمای بلوک سنجه، $u(\theta)$

دمای آزمایشگاه به صورت $(19/9 \pm 0/5)^\circ\text{C}$ ذکر شده است؛ در هر اندازه‌گیری، دما ثابت نشده است اما بیشینه‌ی انحراف $\Delta = 0/5^\circ\text{C}$ است. دامنه تغییرات تقریباً دوره‌ای دما که توسط سیستمی کنترل می‌شود، دما را نمایش می‌دهد، نه عدم قطعیت میانگین دما را. مقدار انحراف میانگین دما

$$\bar{\theta} = 19/9^\circ\text{C} - 20^\circ\text{C} = -0/1^\circ\text{C}$$

گزارش شده است به گونه‌ای که خودش دارای عدم قطعیتی ناشی از عدم قطعیت در دمای میانگین زمان کالیبراسیون است. $u(\bar{\theta}) = 0/2^\circ\text{C}$ تغییر دوره‌ای نسبت به زمان، یک توزیع U شکل دارد و به عدم قطعیت استاندارد زیر می‌انجامد:

$$u(\Delta) = (0/5^\circ\text{C}) / \sqrt{2} = 0/35^\circ\text{C}$$

انحراف دمای θ را می‌توان برابر با $\bar{\theta}$ گرفت و عدم قطعیت استاندارد θ از

$$u^2(\theta) = u^2(\bar{\theta}) + u^2(\Delta) = 0/165^\circ\text{C}$$

به دست می‌آید در نتیجه:

$$u(\theta) = 0/41^\circ\text{C}$$

چون $c_\theta = \partial f / \partial \theta = -l_s \delta \alpha = 0$ ، این عدم قطعیت در عدم قطعیت مرتبه اول l سهمیم نیست.

عدم قطعیت اختلاف در ضرایب انبساط، $u(\delta \alpha)$

حدود برآورد شده در تغییرپذیری $\delta \alpha$ عبارتند از: $\pm 1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$ با احتمال برابر که $\delta \alpha$ هر یک از مقادیر واقع در آن مرزها را داشته باشد. عدم قطعیت استاندارد عبارت است از:

$$u(\delta \alpha) = 1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1} / \sqrt{3} = 0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1}$$

عدم قطعیت اختلاف در دمای سنج‌ها، $u(\delta \theta)$

انتظار می‌رود که سنج‌های استاندارد و مورد کالیبراسیون دارای دمای یکسانی باشند، ولی اختلاف دما می‌تواند با احتمال برابر در هر جا از بازه $-0.5 \text{ } ^\circ \text{C}$ تا $+0.5 \text{ } ^\circ \text{C}$ قرار گیرد. عدم قطعیت استاندارد عبارت است از:

$$u(\delta \theta) = (0.5 \text{ } ^\circ \text{C}) / \sqrt{3} = 0.29 \text{ } ^\circ \text{C}$$

عدم قطعیت استاندارد مرکب

عدم قطعیت استاندارد مرکب $u_c(l)$ برابر است با:

$$\begin{aligned} u_c^2(l) &= (25nm)^2 + (9/7nm)^2 \\ &+ (0.5m)^2 (-0.1 \text{ } ^\circ \text{C})^2 (0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1})^2 \\ &+ (0.5m)^2 (11/5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ \text{C}^{-1})^2 (0.29 \text{ } ^\circ \text{C})^2 \\ &= (25nm)^2 + (9/7nm)^2 + (2/9nm)^2 + (16/6nm)^2 = 1002nm^2 \end{aligned}$$

یا

$$u_c(l) = 32nm$$

بدیهی است که مؤلفه‌ی غالب عدم قطعیت، مقدار استاندارد $u(l_s) = 25nm$ است. خلاصه محاسبات در جدول بیلان عدم قطعیت آمده است.

نتیجه کالیبراسیون

گواهینامه‌ی کالیبراسیون بلوک سنج استاندارد، $l_s = 50/000623 \text{ mm}$ را به عنوان طول آن در دمای 20°C گزارش کرده است. $\bar{d}$ میانگین حسابی پنج مشاهده تکرار شده، اختلاف بین طول‌های بلوک سنج تحت کالیبراسیون و بلوک سنج استاندارد 215 nm است. بنابراین، چون $l = l_s + \bar{d}$ است طول بلوک سنج تحت کالیبراسیون در 20°C ، $50/000838 \text{ mm}$ است. بنابراین نتیجه نهائی اندازه‌گیری را می‌توان بصورت زیر بیان کرد:

$l = 50/000838$ با عدم قطعیت استاندارد مرکب $u_c = 32 \text{ nm}$. عدم قطعیت استاندارد مرکب نسبی متناظر با آن $u_c/l = 6/4 \times 10^{-7}$ است.

فرض کنید عدم قطعیت گسترده با سطح اطمینان تقریباً ۹۹٪ باید گزارش شود. در این صورت درجه آزادی مورد نیاز باید تعیین شوند.

عدم قطعیت کالیبراسیون استاندارد، $u(l_s)$: گواهینامه کالیبراسیون بیان می‌کند که درجه آزادی مؤثر عدم قطعیت استاندارد مرکب که از آن عدم قطعیت گسترده به‌دست می‌آید عبارت است از $v_{\text{eff}}(l_s) = 18$

عدم قطعیت اختلاف بین طولها، $u(d)$: اگرچه $\bar{d}$ از پنج مشاهده به‌دست آمده و چون $u(\bar{d})$ از یک انحراف معیار ادغام شده بر مبنای ۲۵ مشاهده به‌دست آمده است، درجه‌ی آزادی $u(\bar{d})$ عبارت است از:

$v(\bar{d}) = 25 - 1 = 24$. درجه آزادی $u(d_1)$ ، عدم قطعیت ناشی از آثار تصادفی روی مقایسه گر، عبارت است از $5 = 6 - 1 = v(d_1)$ زیرا d_1 از شش اندازه‌گیری به‌دست آمده بود. عدم قطعیت $\pm 0.2 \mu\text{m}$ برای آثار سیستماتیک روی مقایسه گر را می‌توان ۲۵ درصد قابل اعتماد فرض کرد، و بنابراین درجه آزادی عبارت است از $v(d_2) = 8$.

بنابراین $v_{\text{eff}}(d)$ درجه‌ی آزادی مؤثر $u(d)$ به صورت زیر به دست می‌آید:

$$v_{\text{eff}}(d) = \frac{\left[u^2(\bar{d}) + u^2(d_1) + u^2(d_2) \right]^2}{\frac{u^4(\bar{d})}{v(\bar{d})} + \frac{u^4(d_1)}{v(d_1)} + \frac{u^4(d_2)}{v(d_2)}} = \frac{(9.7 \text{ nm})^4}{\frac{(5.8 \text{ nm})^4}{24} + \frac{(3.9 \text{ nm})^4}{5} + \frac{(6.7 \text{ nm})^4}{8}} = 25.6$$

عدم قطعیت اختلاف در ضرایب انبساط، $u(\delta\alpha)$: به‌نظر می‌رسد که حدود برآورد شده $\pm 1 \times 10^{-6}^\circ\text{C}$ روی تغییرپذیری $\delta\alpha$ تا ۱۰ درصد قابل اعتماد باشند. بنابراین خواهیم داشت، $v(\delta\alpha) = 50$.

عدم قطعیت اختلاف در دمای سنج‌ها، $u(\delta\theta)$: معمولاً بازه برآورد شده‌ی $C \pm 0.5^\circ$ - تا $C \pm 0.5^\circ$ + برای اختلاف دمای $\delta\theta$ فقط تا ۵۰ درصد قابل اعتماد است، بنابراین خواهیم داشت:

$$v(\delta\alpha) = 2$$

برای محاسبه $v_{eff}(l)$ خواهیم داشت:

$$v_{eff}(l) = \frac{(32nm)^4}{\frac{(25nm)^4}{18} + \frac{(9.7nm)^4}{25.6} + \frac{(2.9nm)^4}{50} + \frac{(16.6nm)^4}{2}} = 16.7$$

برای به‌دست آوردن عدم قطعیت گسترده مورد نیاز، این مقدار ابتدا باید به عدد صحیح کوچکتر گرد شود، پس $v_{eff}(l) = 16$. بنابراین از جداول مربوط خواهیم داشت: $t_{99}(16) = 2/92$ ، و در نتیجه:

$$U_{99} = t_{99}(16)u_c(l) = 2.92 \times (32nm) = 93nm$$

بنابراین نتیجه نهائی اندازه‌گیری را می‌توان چنین بیان کرد:

نتیجه کالیبراسیون با عدم قطعیت گسترده که از ضرب عدم قطعیت استاندارد مرکب $u_c = 32nm$ در ضریب پوشش $k = 2/92$ بر مبنای توزیع t با درجه آزادی ۱۶ و سطح اطمینان ۹۹ درصد برآورد شده برابر است با:

$$l = (50.000838 \pm 0.000093)mm$$

عدم قطعیت گسترده نسبی متناظر با آن عبارت است از $U/l = 1/9 \times 10^{-6}$
جملات مرتبه دوم که از آن‌ها صرف‌نظر شد عبارتند از:

$$l_s^2 u^2(\delta\alpha) u^2(\theta) + l_s^2 u^2(\alpha_s) u^2(\delta\theta)$$

جملات مرتبه دوم $u_c(l)$ را از ۳۲ nm به ۳۴ nm افزایش می‌دهند.

جدول بیان عدم قطعیت کالیبراسیون بلوک سنج

درجه آزادی	$u_i(l) \equiv c_i u(x_i)$ (nm)	$C_i = \partial f / \partial x$	مقدار عدم قطعیت استاندارد $u(x_i)$	منبع عدم قطعیت	مولفه‌های عدم قطعیت استاندارد $u(x_i)$
18	25	1	25 nm	کالیبراسیون بلوک $32nm$ سنجه مرجع	$u(l_s)$
25.6 25.6 24 5 8	9.7	1	9.7 nm 5.8 nm 3.9 nm 6.7 nm	اختلاف اندازه‌گیری شده بین بلوک سنج‌ها مشاهدات تکرار شده آثار تصادفی مقایسه‌گر آثار سیستماتیک مقایسه‌گر	$u(d)$ $u(\bar{d})$ $u(d_1)$ $u(d_2)$
0	0	0	$1.2 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	ضریب انبساط گرمایی بلوک سنجه استاندارد	$u(\alpha_s)$
0	0	0	$0.41 \text{ } ^\circ\text{C}$ $0.2 \text{ } ^\circ\text{C}$ $0.35 \text{ } ^\circ\text{C}$	دمای کالیبراسیون دمای میانگین تغییر دوره‌ای دمای آزمایشگاه	$u(\theta)$ $u(\bar{\theta})$ $u(\Delta)$
50	2.9	$-l_s \theta$	$0.58 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}$	اختلاف ضرایب انبساط گرمایی بلوک‌های سنج	$u(\delta\alpha)$
2	16.6	$-l_s \alpha_s$	$0.029 \text{ } ^\circ\text{C}$	اختلاف دمای بلوک‌های سنجه	$u(\delta\theta)$
$u_c^2(l) = \sum u_i^2(l) = 1002 \text{ nm}$ $v_{eff} = 16 \quad u_c(l) = 32 \text{ nm}$					

مثال ۲ اندازه‌گیری سختی

سختی کمیته‌ای است که بدون مراجعه به یک روش اندازه‌گیری، نمی‌تواند بطور کمی سنجیده شود و یکایی ندارد که مستقل از چنین روشی باشد. کمیت "سختی" مشابه کمیت‌های قابل اندازه‌گیری کلاسیک دیگر نیست که در آن‌ها نمی‌توان وارد معادلات جبری برای تعریف کمیت‌های قابل اندازه‌گیری دیگر شد-گرچه گاهی اوقات در معادلات تجربی به کار می‌رود که در آنجا سختی

را به خاصیت دیگری برای گونه‌ای از مواد ارتباط می‌دهد-بزرگی آن با یک اندازه‌گیری قراردادی، مشخصات ابعادی یک قطعه فرورونده در بلوک ماده مورد نظر، یا بلوک نمونه تعیین می‌شود. اندازه‌گیری طبق استاندارد انجام می‌شود، که شامل توصیفی از "قطعه فرورونده"، ساختمان ماشینی که توسط آن فرورونده اعمال می‌شود و روشی که ماشین باید عمل نماید، باشد.

سختی گزارش شده (بسته به مقیاس) تابعی خطی از ابعاد اندازه‌گیری شده است. در این مثال، تابع خطی از میانگین حسابی یا متوسط عمق پنج فرورفتگی حاصل شده است، ولی در برخی مقیاس‌های دیگر تابع غیر خطی است. نتایج ماشین استاندارد به‌عنوان استاندارد ملی نگهداری می‌شود (و نمونه بین‌المللی وجود ندارد)؛ مقایسه بین یک ماشین ویژه و ماشین استاندارد ملی با استفاده از بلوک استاندارد انتقالی انجام می‌شود.

در این مثال سختی یک نمونه بلوک در مقیاس "راکول C" با استفاده از ماشینی که در مقابل یک ماشین استاندارد کالیبره شده است، تعیین می‌شود. یکای مقیاس سختی راکول C، 0.002 میلی‌متر است، که سختی روی آن مقیاس به‌صورت $(0.002 \text{ nm}) \times 100$ منهای متوسط عمق پنج فرورفتگی برحسب میلی‌متر است. مقدار آن کمیت تقسیم بر 0.002 میلی‌متر یکای مقیاس راکول "شاخص سختی HRC" نامیده می‌شود. در این مثال کمیت برای سادگی "سختی" نامیده می‌شود، نماد $h_{Rockwell C}$ ، و مقدار عددی سختی بیان شده برحسب راکول یکای طول "شاخص سختی" با نماد $H_{Rockwell C}$ نامیده می‌شود.

مدل ریاضی مورد استفاده به صورت زیر است.

$$h_{RC} = f(\bar{d}, \Delta_c, \Delta_b, \Delta_s) = 100(0.002 \text{ mm}) - \bar{d} - \Delta_c - \Delta_b - \Delta_s$$

$$H_{RC} = h_{RC} / (0.002 \text{ mm})$$

که:

$\bar{d}$ میانگین عمق‌های پنج فرورفتگی ایجاد شده در بلوک نمونه توسط ماشین کالیبراسیون است.

Δ_c تصحیح به‌دست آمده از مقایسه ماشین کالیبراسیون با ماشین استاندارد ملی و با استفاده از بلوک استاندارد - انتقالی است و برابر با میانگین عمق‌های پنج فرورفتگی ایجاد شده توسط ماشین استاندارد ملی در این بلوک، منهای میانگین عمق‌های پنج فرورفتگی ایجاد شده در همان بلوک توسط ماشین کالیبراسیون می‌باشد.

Δ_b اختلاف در سختی-که به صورت اختلاف میانگین عمق فرورفتگی‌ها بیان می‌شود-بین دو

ناحیه از بلوک استاندارد - انتقالی است و به ترتیب برای فرورفتگی های ایجاد شده توسط هر دو ماشین بکار می‌رود و معمولاً صفر فرض می‌شود. Δ_s خطا در اثر عدم تکرار پذیری ماشین استاندارد ملی و کامل نبودن تعریف کمیت سختی است. اگرچه Δ_s باید صفر فرض شود؛ ولی عدم قطعیت استاندارد وابسته به آن $u(\Delta_s)$ است.

چون مشتقات جزئی $\partial f / \partial \bar{d}$, $\partial f / \partial \Delta_c$, $\partial f / \partial \Delta_b$ و $\partial f / \partial \Delta_s$ برابر با ۱- هستند، عدم قطعیت استاندارد مرکب $u_c^2(h)$ سختی بلوک نمونه هنگامی که با ماشین کالیبراسیون اندازه‌گیری می‌شود از رابطه زیر بدست می‌آید.

$$u_c^2(h) = u^2(\bar{d}) + u^2(\Delta_c) + u^2(\Delta_b) + u^2(\Delta_s)$$

که برای سادگی در نمایش $h \equiv h_{RockwellC}$ نوشته شده است.

عدم قطعیت میانگین عمق فرورفتگی $\bar{d}$ بلوک نمونه، $u(\bar{d})$

مسلماً تکرار مشاهدات امکان‌پذیر نیست؛ زیرا هر فرورفتگی جدید نمی‌تواند دقیقاً در محل فرورفتگی قبلی باشد. هر تغییری در نتایج، شامل اثر تغییرات در سختی بین مکان‌های متفاوت می‌شود. بنابراین $u(\bar{d})$ ، عدم قطعیت استاندارد میانگین عمق های پنج فرورفتگی در بلوک نمونه توسط ماشین کالیبراسیون به صورت $s_p(d_k) / \sqrt{5}$ گرفته می‌شود. $s_p(d_k)$ انحراف معیار ادغام شده عمق فرورفتگی‌های تعیین شده با تکرار اندازه‌گیری‌های روی یک بلوک معلوم است که دارای سختی یکنواختی می‌باشد.

عدم قطعیت فرورفتگی

اگرچه تصحیح $\bar{d}$ برای نشاندهی ماشین کالیبراسیون صفر است، ولی عدم قطعیت نشاندهی عمق در اثر تفکیک پذیری δ نشاندهی با رابطه $u^\vee(\delta) = \delta^2 / 12$ داده می‌شود. بنابراین واریانس برآورده شده $\bar{d}$ عبارت است از: $u^\vee(\bar{d}) = s^2(d_k) / 5 + \delta^2 / 12$

عدم قطعیت تصحیح اختلاف بین دو ماشین، $u(\Delta_c)$

همانطور که گفته شد Δ_c تصحیح اختلاف بین ماشین استاندارد ملی و ماشین کالیبراسیون است. این تصحیح را می‌توان به صورت $\Delta_c = z'_S - z'$ بیان کرد، که

$z'_S = \left(\sum_{i=1}^m \bar{z}_{S,i} \right) / m$ میانگین عمق ۵ فرورفتگی ایجاد شده توسط ماشین استاندارد ملی در بلوک استاندارد - انتقالی است؛ و $z' = \left(\sum_{i=1}^n \bar{z}_i \right) / n$ میانگین عمق فرورفتگی ایجاد شده در همان بلوک توسط ماشین کالیبراسیون است. بنابراین با فرض این که در مقایسه، عدم قطعیت ناشی از تفکیک پذیری نشاندهی هر دو ماشین قابل چشم پوشی است، واریانس برآورد شده Δ_c عبارت است از:

$$u^2(\Delta_c) = \frac{s_{av}^2(\bar{z}_S)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n}$$

فرورفتگی‌های $z_{S,ik}$ ایجاد شده توسط ماشین استاندارد است. $s_{av}^2(\bar{z}_S) = \left[\sum_{i=1}^m s^2(\bar{z}_{S,i}) \right] / m$ میانگین واریانس‌های میانگین‌های هر m سری از

فرورفتگی‌های z_{ik} ایجاد شده توسط ماشین کالیبراسیون است. $s_{av}^2(\bar{z}) = \left[\sum_{i=1}^n s^2(\bar{z}) \right] / n$ میانگین واریانس‌های میانگین‌های هر n سری از واریانس‌های $s_{av}^2(\bar{z}_S)$ و $s_{av}^2(\bar{z})$ برآوردهای ادغام شده هستند.

عدم قطعیت تصحیح ناشی از تغییرات سختی بلوک استاندارد - انتقالی، $u(\Delta_b)$ استاندارد بین‌المللی $OIML-R 12$ با عنوان "تصدیق و کالیبراسیون بلوک‌های استاندارد شده سختی راکول C"، ملزم می‌دارد که بیشینه و کمینه عمق‌های فرورفتگی به‌دست آمده از پنج اندازه‌گیری روی بلوک استاندارد - انتقالی نباید بیش از x از میانگین عمق فرورفتگی باشد که x تابعی از تراز سختی است. بنابراین، اجازه دهید بیشینه اختلاف در عمق فرورفتگی‌ها در کل بلوک xz' باشد، که z' برابر با $n=5$ است. همچنین بیشینه اختلاف در اطراف مقدار میانگین $xz'/2$ با توزیع احتمال مثلثی توصیف می‌شود - با این فرض که مقادیر نزدیک به مقدار مرکزی محتمل‌تر از مقادیر کرانه‌ای هستند - بنابراین:

$$u^2(\Delta_b) = (xz')^2 / 2$$

همانگونه که نشان داده شد، فرض می‌شود که بهترین برآورد خود تصحیح Δ_b صفر است.

عدم قطعیت ماشین استاندارد ملی و تعریف سختی $u(\Delta_s)$:

عدم قطعیت ماشین استاندارد ملی همراه با عدم قطعیت ناشی از کامل نبودن تعریف کمیت سختی به صورت انحراف معیار برآورد شده $u(\Delta_s)$ (کمیتی با بعد طول) گزارش می‌شود.

عدم قطعیت استاندارد مرکب، $u_c(h)$:

$$u_c^2(h) = \frac{s^2(d_k)}{5} + \frac{\delta^2}{12} + \frac{s_{av}^2(\bar{z}_s)}{m} + \frac{s_{av}^2(\bar{z})}{n} + \frac{(xz')^2}{24} + u^2(\Delta_s)$$

مثال عددی:

مقیاس سختی راکول C ، با HRC نشان داده می‌شود. یکای مقیاس راکول 0.002 mm است. بنابراین برای مثال $36/0$ یکای مقیاس راکول "به معنای:

$$0.002 \text{ mm} \times 36/0 = 0.072 \text{ mm}$$

اگر مقادیر مربوط را که در جدول بیلان عدم قطعیت آمده در رابطه‌ی اصلی قرار دهیم عبارت

زیر به دست می‌آید:

$$u_c^2(h) = \left[\frac{0.45^2}{5} + \frac{0.1^2}{12} + \frac{0.10^2}{6} + \frac{0.11^2}{6} + \frac{(0.015 \times 36.0)^2}{24} + 0.5^2 \right]$$

$$= 0.307 \text{ (یکای مقیاس راکول)}$$

$$u_c(h) = 0.0011 \text{ mm} = 0.55 \text{ (یکای مقیاس راکول)}$$

و:

به منظور محاسبه‌ی عدم قطعیت کافی است که $\bar{z}' = \bar{d} = 0/36$ یکای مقیاس راکول گرفته

شود. بنابراین، اگر فرض شود که $\Delta_C = 0$ ، سختی بلوک نمونه عبارت است از:

(یکای مقیاس راکول $h_{RockwellC} = 0/64$) یا 0.128 mm با عدم قطعیت استاندارد مرکب

$$u_c = 0/55 \text{ یا } 0.0011 \text{ mm}$$

شاخص سختی بلوک عبارت است از:

$$h_{RockwellC} / (0.002 \text{ mm}) = (0.128 \text{ mm}) / (0.002 \text{ mm}) = 64/HRC$$

$$u_c = 0/55 HRC \text{ با عدم قطعیت استاندارد مرکب}$$

افزون بر مؤلفه عدم قطعیت ناشی از ماشین استاندارد ملی و تعریف سختی، (یکای مقیاس راکول) $u(\Delta_s) = 0/5$ ، مؤلفه‌های عمده عدم قطعیت مربوط به تکرارپذیری ماشین (یکای مقیاس راکول) $s_p(d_k)/\sqrt{3} = 0/20$ ؛ و تغییر سختی بلوک استاندارد - انتقالی، که عبارت است از (یکای مقیاس راکول) $(xz')^2/24 = 0/11$ ، درجه آزادی مؤثر ν_c را می‌توان با استفاده از فرمول Welch-Satterthwaite ارزیابی کرد.

مقدار	منبع عدم قطعیت
0/36 (یکای مقیاس راکول)	$\bar{d}$ متوسط عمق پنج فرورفتگی ایجاد شده توسط ماشین کالیبراسیون در بلوک نمونه 0/72 mm
64/0 HRC	شاخص سختی بلوک نمونه نشان داده شده از پنج فرورفتگی $H_{RockwellC} = h_{RockwellC} / (0/02mm) =$ $= [10 \cdot (0/02mm) - 0/72mm] / (0/02mm)$
0/45 (یکای مقیاس راکول)	$s_p(d_k)$ انحراف معیار ادغام شده عمق فرورفتگی‌های ایجاد شده توسط ماشین کالیبراسیون در بلوک دارای سختی یکنواخت
0/1 (یکای مقیاس راکول)	δ تفکیک‌پذیری نشاندهی ماشین کالیبراسیون
0/01 (یکای مقیاس راکول)	$s_{av}(\bar{z})$ ریشه میانگین واریانسهای تجربی میانگین های m سری فرورفتگی ایجاد شده توسط ماشین استاندارد ملی در بلوک استاندارد - انتقال دهنده
0/11 (یکای مقیاس راکول)	$s_{av}(\bar{z})$ ریشه میانگین واریانسهای تجربی میانگین n سری فرورفتگی ایجاد شده توسط ماشین کالیبراسیون در بلوک استاندارد - انتقال دهنده
$1/5 \times 10^{-2}$	$\mathcal{X}$ تغییر کسری مجاز عمق فرورفتگی در بلوک استاندارد - انتقال دهنده
0/5 (یکای مقیاس راکول)	$u(\Delta_s)$ عدم قطعیت استاندارد ماشین استاندارد ملی و تعریف سختی

مثال ۳ کالیبراسیون دماسنج مقاومتی پلاتینی استاندارد (SPRT)

کالیبراسیون دماسنج مقاومتی پلاتینی استاندارد (SPRT) در تعدادی از نقاط ثابت دمایی مشخص صورت می‌پذیرد. در این روش، دما از تابع معکوس زیر که در مقیاس دمای ITS90 تعریف

شده، محاسبه می‌شود.

$$T - 273.15 = D_0 + \sum_{i=1}^9 D_i \left[\frac{W_{rT} - 2.64}{1.64} \right]^i \quad (۱)$$

مقادیر مربوط به ضرایب D_i از جداول مربوط تعیین می‌شوند. مقادیر W_{rT} هم از تابع انحراف محاسبه می‌شوند.

$$W_{rT} = W_T - \Delta W_T \quad (۲)$$

ΔW_T تابع انحراف از کالیبراسیون $SPRT$ است.

$$W_T = \frac{R_T}{R_{TPW}}$$

R_T مقاومت $SPRT$ در دمای T و R_{TPW} مقاومت $SPRT$ در نقطه سه گانه آب است.

مقدار دمای اندازه‌گیری شده T با قرار دادن W_{rT} در معادله (۱) مشخص می‌شود.

عدم قطعیت دمای اندازه‌گیری شده با رابطه زیر برآورد می‌شود:

$$U(T) = A_{rT} U(W_{rT})$$

به طوری که $U(W_{rT}) = W_{rT}$ عدم قطعیت استاندارد مرکب نسبت مقاومت و A_{rT} ضریب حساسیت است.

$$A_{rT} = \frac{\partial f(T)}{\partial W_{rT}} = \sum_{i=1}^9 \frac{i D_i}{1.64} \left[\frac{W_{rT} - 2.64}{1.64} \right]^{i-1}$$

بر اساس روابط موجود در ITS90، رابطه (۲) به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$W_T - W_{rT} = \Delta W_T = a[W_T - 1] + b[W_T - 1]^2 + C[W_T - 1]^3$$

بنابراین:

$$U^2(W_{rT}) = U^2(W_T) + U^2(\Delta W_T) - 2U(W_T, \Delta W_T)$$

$U(W_T)$ عدم قطعیت استاندارد مرکب نسبت مقاومت W_T در اندازه‌گیری دمای T به وسیله‌ی دماسنج کالیبره شده و مقدار مقاومت اندازه‌گیری شده در نقطه‌ی سه گانه آب، $U(\Delta W_T)$ عدم قطعیت انحراف از نسبت مقاومت و $U(W_T, \Delta W_T)$ کواریانس بین W_T و ΔW_T است.

با در نظر گرفتن کواریانس بین W_T و ΔW_T ، رابطه‌ی زیر حاصل می‌شود.

$$U^2(W_T) = \frac{U^2(R) + W_T^2 U^2(R_{TWT}) - 2W_T U(R_T, R_{TBVT})}{R_{TPWT}^2}$$

اگر مقادیر مقاومت R_{TPW} از منابع مختلف حاصل شود (چنانچه مقاومت اندازه‌گیری شده SPRT در T و TWP در حین کالیبراسیون SPRT همبسته نباشد) در این صورت رابطه‌ی فوق ساده‌تر می‌شود.

مثال ۴: برآورد عدم قطعیت کالیبراسیون یک ترازو

کالیبراسیون یک ترازوی دیجیتالی با ظرفیت ۵۰ g و حداقل زینه ۰/۱ mg با وزنه‌های کلاس F_1 انجام می‌شود. تکرارپذیری ترازو قبلاً تعیین شده است. انحراف معیار مقادیر مربوط به نقطه صفر و تمام مقیاس ۰/۰۴۲ mg است.

مدل ریاضی اندازه‌گیری به صورت زیر می‌باشد:

$$C_i = M_i - (r_i - Z_i)$$

C_i = تصحیح قرائت‌ها

M_i = وزنه استاندارد مورد استفاده

r_i = میانگین دو قرائت تکراری ترازو با وزنه استاندارد

Z_i = میانگین دو قرائت ترازو در حالت بی‌باری

برای کالیبراسیون در نقطه ۴۵g از ترکیب سه وزنه استاندارد با مشخصات زیر استفاده می‌شود:

جرم	مقدار (g)
۱	۲۰/۰۰۰۰۸۸
۲	۱۹/۹۹۹۹۹۵
۳	۵/۰۰۰۰۳۰
جمع کل	۴۵/۰۰۰۱۱۳

نتایج مشاهدات در جداول زیر ثبت شده است:

۰/۰۰۰۰ g	اولین قرائت نقطه صفر
۴۵/۰۰۰۳ g	اولین قرائت وزنه استاندارد
۴۵/۰۰۰۳ g	دومین قرائت وزنه استاندارد
۰/۰۰۰۱ g	دومین قرائت نقطه صفر

محاسبات زیر را انجام می‌دهیم:

$$۰/۰۰۰۰۵ \text{ g}$$

میانگین قرائت‌های نقطه صفر

$$۴۵/۰۰۰۳۰ \text{ g}$$

میانگین قرائت‌های جرم استاندارد

$$C_i = M_i - (r_i - Z_i) = ۴۵/۰۰۰۱۱۳(۴۵/۰۰۰۳۰ - ۰/۰۰۰۰۵) \text{ g}$$

$$= -۰/۰۰۰۱۳۷ \text{ g} = -۰/۱ \text{ mg}$$

نتیجه را به اندازه‌ی زینه ترازو گرد می‌کنیم.

چهار منبع اصلی عدم قطعیت در فرایند کالیبراسیون وجود دارد که عبارتند از:

✓ عدم قطعیت مقدار جرم وزنه استاندارد؛

✓ عدم قطعیت زینه ترازو؛

✓ عدم قطعیت تکرارپذیری ترازو؛

✓ عدم قطعیت مربوط به ناپایداری وزنه استاندارد.

اطلاعات زیر از گواهی‌نامه کالیبراسیون وزنه‌های مورد استفاده اخذ شده است.

جرم	مقدار (g)	$U_{95\%}(\text{mg})$	K	U (mg)	درجه آزادی
۱	۲۰/۰۰۰۰۸۸	۰/۰۱۹	۲	۰/۰۰۹۵	۵۰
۲	۱۹/۹۹۹۹۹۵	۰/۰۱۹	۳	۰/۰۰۹۵	۵۰
۳	۵/۰۰۰۰۳۰	۰/۰۰۹	۲	۰/۰۰۴۳	۲۰
جمع کل				۰/۰۱۴	۱۲۰

عدم قطعیت مربوط به ناپایداری وزنه استاندارد

وزنه‌های مورد استفاده نو می‌باشند و سوابق کالیبراسیون ندارند اما سازنده‌ی وزنه‌ها اعلام نموده است که ناپایداری آن‌ها ۰/۱۰٪ بیشینه خطای مجاز در فواصل کالیبراسیون است. بیشینه خطای مجاز وزنه ۲۰ گرمی کلاس F₁ برابر ۰/۲۵ mg و وزنه ۵ گرمی ۰/۱۶ mg است. با فرض توزیع مستطیلی برای ناپایداری:

$$U = \frac{0/25}{\sqrt{3}} = 0/144 \text{ mg}$$

$$U = \frac{0/16}{\sqrt{3}} = 0/092 \text{ mg}$$

به دلیل این که برآورد گستره مقادیر بر اساس اطلاعات عمومی است - نه اطلاعات خاص و فنی - لذا سطح اطمینان مقادیر برآورد شده بیشتر از ۷۵٪ (عدم قطعیت نسبی ۰/۲۵٪) نمی‌باشد. شانس ۱ در ۴ وجود دارد که عدم قطعیت هر جرم در گستره‌ی برآورده شده قرار نگیرد. درجه آزادی هر جرم به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$\nu_r = \nu_r = \nu_r = \frac{4^2}{2} = 8$$

عدم قطعیت زینه ترازو

کم‌ترین زینه ترازو ۰/۱ mg است، بنابراین:

$$U = \frac{0/05}{\sqrt{3}} = 0/0289 \text{ mg}$$

تعداد درجه‌ی آزادی بی‌نهایت است.

عدم قطعیت تکرارپذیری ترازو

بررسی‌های انجام شده نشان می‌دهد که انحراف معیار تکرارپذیری 0.042 mg با درجه آزادی $\nu = 10 - 1 = 9$ است.

منبع عدم قطعیت	یکای اندازه‌گیری	تابع توزیع	$U(\text{mg})$	مقسوم علیه	ν_i	$U(x)(\text{mg})$	C_i	$C_i U_i(x_i) = U_i(y)$
عدم قطعیت وزنه‌ها U_{mass}	kg	نرمال	0.0141	۱	۱۲۰	0.0141	۱	0.0141
ناپایداری وزنه 30 g	mg	مستطیلی	0.250	$1/7321$	۸	0.144	۱	0.144
ناپایداری وزنه 20 g	mg	مستطیلی	0.250	$1/7321$	۸	0.144	۱	0.144
ناپایداری وزنه 5 g	mg	مستطیلی	0.16	$1/7321$	۸	0.092	۱	0.092
تفکیک‌پذیری ترازو	mg	مستطیلی	0.05	$1/7321$	∞	0.0289	۱	0.0289
تکرارپذیری ترازو	mg	نرمال	0.042	۱	۹	0.042	۱	0.042
عدم قطعیت مرکب U_C: $U_C = 0.23 \text{ mg} \Rightarrow U_C^* = 0.53$ عدم قطعیت گسترده با سطح اطمینان ۹۵٪ و $k=2$: $U_e = 0.23 \times 2 = 0.46 \text{ mg}$								

مثال ۵ سنجه‌های حجمی

کالیبراسیون سنجه‌های حجمی را می‌توان مطابق استاندارد ISO4787 و با توجه به نوع آن (تخلیه‌ای یا گنجایشی) انجام داد. برای کالیبراسیون، یک ترازو نیاز است و در طی کالیبراسیون، دما باید پایش شود. کالیبراسیون تجهیزات حجمی با آب مقطر انجام می‌شود. حجم آب با توجه به چگالی آن، تعیین می‌گردد. بهتر است دمای کالیبراسیون 20 ± 0.5 °C باشد. ابتدا جرم سنجه حجمی که خشک و خالی است تعیین می‌شود. سپس آن را از آب - که

دمایش کنترل می‌شود- پر شده و مجدداً جرمش با ترازو اندازه‌گیری می‌شود. با توجه به اختلاف حاصل از دو توزین انجام شده، حجم سنج به دست می‌آید. این فرآیند، ده بار تکرار می‌شود. در استاندارد ISO4787 حجم سنج در دمای $20^{\circ}C$ به صورت زیر است:

$$V_{20} = (I_L - I_E) \times \frac{1}{\rho_w - \rho_A} \times \left(1 - \frac{\rho_A}{\rho_B} \right) \times [1 - \gamma(t - 20)] + \delta V_{men} + \delta V_{evap} \quad (1)$$

V_{20} : حجم در دمای $20^{\circ}C$ (mL)

I_L : جرم سنج در حالت پر از آب

I_E : جرم سنج در حالت خالی

ρ_w : چگالی آب در دمای کالیبراسیون t، برحسب g/ml

ρ_A : چگالی هوا (0.0012 g/ml)

ρ_B : چگالی وزنه استاندارد (8 g/ml)

γ : ضریب انبساط حجمی سنج تحت کالیبراسیون

t: دمای آب مورد استفاده در کالیبراسیون بر حسب $^{\circ}C$

δV_{men} : اثر ناشی از موقعیت سطح هلالی آب

δV_{evap} : اثر ناشی از تبخیر آب

با توجه به مدل فوق، مولفه‌های عدم قطعیت عبارتند از:

جرم سنج، چگالی آب، چگالی هوا، چگالی وزنه استاندارد، ضریب انبساط حجمی سنج تحت کالیبراسیون، قرائت سطح هلالی آب و تفکیک‌پذیری تجهیزات اندازه‌گیری مورد استفاده. عدم قطعیت استاندارد این مولفه‌ها به صورت زیر تعیین می‌شود:

$$U(m) = \left[2 \left(\frac{u(bal)}{2} \right)^2 + \left(\frac{S(m)}{\sqrt{n}} \right)^2 \right]^{1/2} (g) \quad (1) \text{ جرم}$$

$U(bal)$: عدم قطعیت استاندارد ترازو

$S(m)$: انحراف معیار اندازه‌گیری جرم (پراکندگی داده‌ها)

n: تعداد اندازه‌گیری

$$U(t) = \left[\left(\frac{u(ther)}{k} \right)^2 + U^2(\delta t) + U^2(\Delta t) \right]^{1/2} \quad (^\circ C) \quad (2) \text{ دمای آب}$$

$U(ther)$: عدم قطعیت اندازه‌گیری دماسنج

$U(\delta t)$: عدم قطعیت ناشی از رانش دماسنج

$U(\Delta t)$: عدم قطعیت میانگین دمای آب که از اختلاف دمای بالا و پایین سنج تحت کالیبراسیون ناشی می‌شود.

یادآوری: بیشینه اختلاف دما در نقاط مختلف سنج، از طریق همزدن آب قابل کاهش است (۱۰ تا ۲۰ میلی‌کلون). اگر این عمل امکان‌پذیر نباشد، به تعیین دمای نقاط مختلف از جمله بالاترین و پایین‌ترین نقطه اندازه‌گیری - T_{max} و T_{min} - توجه می‌شود. با در نظر گرفتن تابع توزیع مستطیلی این مولفه:

$$U(\Delta t) = \frac{(t_{max} - t_{min})}{\sqrt{12}}$$

(۳) چگالی آب

چگالی آب را با توجه به نوع آب مورد استفاده (ناخالص و یا دارای هوا و...) باید تعیین کرد. با توجه به رابطه‌ای که Tanaka ارائه نموده، عدم قطعیت گسترده $9 \times 10^{-7} \text{ g/ml}$ برآورد شده است. البته به این مقدار باید عدم قطعیت خلوص و دمای آب مورد استفاده، افزوده شود. اگر اطلاعات کافی از آب مورد استفاده در دسترس نباشد و یا احتمال آلوده شدن آب در فرآیند کالیبراسیون وجود داشته باشد، می‌توان چگالی آب را با یک چگالی سنج با تفکیک‌پذیری مناسب (مثلاً 1 ppm) اندازه‌گیری نمود و یا چگالی آن را با یک نمونه آب خالص مقایسه کرد. در این صورت گستره‌ی چگالی مورد اندازه‌گیری از چند ppm برای آب بسیار خالص - که در آن ترکیبات ایزوتوپی آب تحت کنترل است - شروع می‌شود و به ۲۰ ppm برای آب مقطر با کیفیت پایین یا دو بار تقطیر، ختم می‌شود.

۴) چگالی هوا

چگالی هوا را می‌توان از فرمول CIPM- 2007 به دست آورد.

$$\rho_A / (10^{-3} \text{ kg m}^{-3}) = \left[3.483740 + 1.4446 \times (x_{\text{co}_2} - 0.0004) \right] \times \frac{P}{ZT}$$

$$(1 - 0.3780 \times x_v)$$

P: فشار محیط بر حسب Pa

T: دمای ترمودینامیکی (بر حسب K)

x_v : کسر مولی بخار آب

x_{co_2} : کسر مولی دی‌اکسیدکربن هوای آزمایشگاه

Z: ضریب تراکم‌پذیری

عدم قطعیت استاندارد نسبی این رابطه در حدود $10^{-6} \times 22$ است.

اگر شرایط محیطی آزمایشگاه در حدود مشخص شده توسط Spiweek باشد، از رابطه‌ی زیر می‌توان استفاده کرد. این حدود عبارتند از: فشار بین ۹۴۰ hPa تا ۱۰۸۰ hPa، دما بین ۱۸ تا ۳۰ درجه سلسیوس و رطوبت کمتر از ۸۰٪.

$$P_A = \frac{k_1 P_A + h_r (k_2 t_A + k_3)}{t_A + 273.15} (g / ml)$$

t_A : دمای محیط بر حسب درجه سلسیوس

P_A : فشار محیط بر حسب hPa

h_r : رطوبت نسبی هوا بر حسب %

$$3 / 4844 \times 10^{-6} \text{ g / ml} = k_1$$

$$-2 / 52 \times 10^{-6} \text{ g / ml} = k_2$$

$$2 / 0.582 \times 10^{-5} \text{ } ^\circ\text{C} = k_3$$

در این صورت عدم قطعیت چگالی هوا برابر است با:

$$U(P_A) = \frac{\cdot / \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot 5}{\sqrt{3}} (g / ml)$$

۵) چگالی وزنه

این مقدار را می‌توان از گواهی کالیبراسیون ترازو یا استاندارد OIMLR111 به دست آورد.

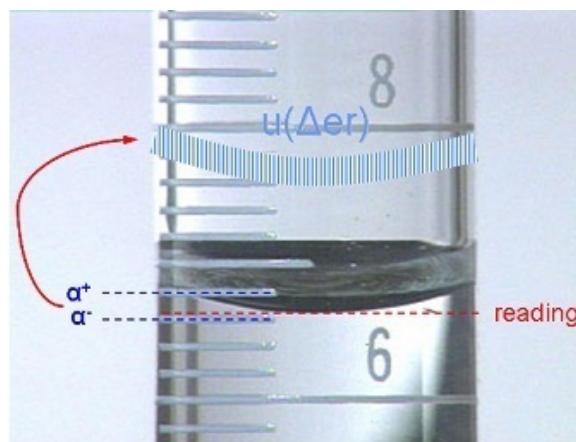
۶) ضریب انبساط حجمی سنجه تحت کالیبراسیون

این مقدار توسط سازنده اعلام می‌شود و مقدار آن معمولاً $\gamma = 1 \times 10^{-5} / ^\circ C$ با عدم قطعیت ۵٪ است. با فرض توزیع مستطیلی داریم:

$$U(\gamma) = \frac{5 \times 10^{-5}}{\sqrt{3}} = 2.89 \times 10^{-5} / ^\circ C$$

۷) قرائت سطح هلالی

در این حالت، عدم قطعیت ناشی از سطح هلالی را می‌توان به صورت عدم قطعیت در حجم حاصل از تفکیک‌پذیری (۲a) سنجه حجمی تعیین نمود. تابع توزیع این عدم قطعیت معمولاً مستطیلی در نظر گرفته می‌شود. برآورد این مؤلفه عدم قطعیت به مهارت کاربر کاملاً بستگی دارد. اصولاً قرائت مکان سطح هلالی با تجهیزات اپتیکی صورت می‌پذیرد. به نظر می‌رسد، تابع توزیع مثلی برای مؤلفه عدم قطعیت واقعی‌تر باشد. برای برآورد این مؤلفه عدم قطعیت مطابق شکل داریم:



خطای قرائت سطح هلالی

$$a_+ = \epsilon / \lambda ml$$

$$a_- = \epsilon / \epsilon ml$$

$$a = \frac{1}{2}(a_+ - a_-) \Rightarrow a = 0.1 ml$$

بنابراین، با تابع توزیع مستطیلی:

$$U(\Delta_{men}) = U(\delta V_{men}) = \frac{a}{\sqrt{3}} = 0.058 ml$$

و با تابع توزیع مثلثی:

$$U(\Delta_{men}) = U(\delta V_{men}) = \frac{a}{\sqrt{u}} = 0.041 ml$$

برای تعیین مکان سطح هلالی سنج‌های حجمی تک نشان، حجم ناشی از قرائت مکان سطح هلالی از طریق حاصلضرب دو ضریب هندسی قابل برآورد است. این ضرایب عبارتند از: عدم قطعیت در تعیین مکان و محاسبه‌ی پایین‌ترین نقطه سطح هلالی (U_p) و مساحت سطح مقطع سنج حجمی (E) در جایی که سطح هلالی آب و هوا قرار گرفته‌اند و می‌توانند به صورت یک استوانه‌ی باریک یا سطح مقطع با اشکال مختلف باشند. بنابراین عدم قطعیت در این حالت برابر است با:

$$U(\delta V_{men}) = \frac{U_p \times E}{\sqrt{3}}$$

با توجه به کیفیت نشانه‌گذاری (حکاکی) سنج حجمی، یک معیار ممکن در تعیین عدم قطعیت پایین‌ترین نقطه سطح هلالی می‌تواند این فرض باشد که عدم قطعیت بیشتر از $\frac{1}{4}$ پهنای درجه‌بندی سنج نیست. ($U_p = 0.5d$) استفاده از ذره‌بین‌های معمولی هم می‌تواند در دسترسی به عدم قطعیت 0.5 mm کمک کند.

۸) تبخیر

به منظور کاهش خطای ناشی از تبخیر آب، توزین سنج‌هایی که از آب پر شده‌اند، باید هر چه سریع‌تر صورت پذیرد.

ضرایب حساسیت کمیت‌های ورودی

در صورتی که عبارات A و B و C را به صورت زیر تعریف نماییم:

$$A = \frac{1}{P_w - P_A} \text{ و } B = 1 - \left(\frac{P_A}{P_B} \right) \text{ و } C = 1 - \gamma(t - t_0)$$

$$m = I_L - I_E$$

در این صورت رابطه‌ی (۱) به صورت زیر نوشته می‌شود.

$$V_0 = m \times A \times B \times C + \delta V_{men} + \delta V_{evap}$$

برای هر یک از کمیت‌های ورودی ضرایب حساسیت را تعیین می‌کنیم.

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial m} \right) = A \times B \times C \quad \text{جرم:}$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial t} \right) = m \times A \times B (-\gamma) \quad \text{دمای آب:}$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial P_w} \right) = -m \times B \times C \times \frac{1}{(P_w - P_A)^2} = -m \times A^2 \times B \times C \quad \text{چگالی آب:}$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial P_A} \right) = m \times C \times A \times \left[\frac{1}{P_w - P_A} \times \left(1 - \frac{P_A}{P_B} \right) - \frac{1}{P_B} \right] = m \times A \times C \times \left(B \times A - \frac{1}{P_B} \right) \quad \text{چگالی هوا:}$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial P_B} \right) = m \times Z \times C \times \frac{P_A}{P_B^2} \quad \text{چگالی وزنه استاندارد:}$$

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial \gamma}\right) = m \times A \times B \times (- (t - t_0))$$

ضریب انبساط حجمی:

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial \delta V_{men}}\right) = 1$$

قرائت سطح هلالی

$$\left(\frac{\partial V_0}{\partial \delta V_{evap}}\right) = 1$$

تبخیر:

عدم قطعیت استاندارد مرکب

با توجه به ضرایب حساسیت، عدم قطعیت استاندارد مرکب به صورت زیر محاسبه می‌شود.

$$U^2(V_0) = \sum_i \left(\frac{\partial V_0}{\partial x_i} U(x_i) \right)^2$$

$$= \left[\left(\frac{\partial V_0}{\partial m} \right)^2 U^2(m) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial t} \right)^2 U^2(t) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial p_w} \right)^2 U^2(p_w) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial P_A} \right)^2 U^2(P_A) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial p_B} \right)^2 U^2(p_B) + \left(\frac{\partial V_0}{\partial \delta} \right)^2 U^2(\delta) + U^2(\delta V_{men}) + U^2(\delta V_{evap}) \right]^{\frac{1}{2}}$$

در صورت وجود هر گونه همبستگی بین کمیت‌های ورودی، کوواریانس آن باید محاسبه و به رابطه‌ی فوق اضافه گردد.

عدم قطعیت گسترده، با انتخاب فاکتور k ، به صورت زیر خواهد بود.

$$U_{exp} = k U(V_0)$$

مثال ۶: تهیه محلول استاندارد

هدف: تهیه محلول استاندارد 1000 mgL^{-1} کادمیوم در HNO_3 برای دستگاه جذب اتمی اسپکتروسکوپی^۱ است.

1- Atomic Absorption Spectroscopy (AAS)

مراحل کار:

۱) سطح فلز بسیار خالص را با مخلوطی از اسیدها از آلودگی‌های اکسید فلزی حذف می‌کنیم. فرآیند تمیزکاری سطح فلز توسط سازنده فلز ارایه شده است.

۲) فلاسک حجمی (۱۰۰ mL) را بدون فلز و با فلز توزین می‌کنیم. تفکیک پذیری ترازوی مورد استفاده ۰/۰۱ mg است.

۳) یک میلی‌لیتر اسیدنیتریک (۶۵g/۱۰۰g) و سه میلی‌لیتر آب بدون یون به فلاسک اضافه می‌شود تا کادمیوم حل شود. سپس فلاسک را از آب بدون یون تا نشان آن پر می‌کنیم.

محاسبات: $C_{cd} = \frac{1000 \times m \times p}{V} \text{mgL}^{-1}$

C_{Cd} غلظت محلول استاندارد (mgL^{-1})

۱۰۰۰ ضریب تبدیل mL به L

m جرم فلز بسیار خالص (mg)

ρ خلوص فلز بر حسب کسر جرمی

V حجم مایع استاندارد (mL)

منابع عدم قطعیت

✓ غلظت: غلظت فلز (Cd) توسط تهیه‌کننده به صورت $(99/99 \pm 0/01)$ اعلام شده است.

بنابراین P برابر است با: $0/9999 \pm 0/0001$

✓ جرم m

جرم کادمیوم اندازه‌گیری شده برابر است با: $m = 0/10028 \text{g}$

منابع عدم قطعیت ترازو عبارتند از:

الف) تکرارپذیری؛

ب) تفکیک‌پذیری؛

پ) عدم قطعیت مربوط به کالیبراسیون ترازو.

✓ حجم V

حجم محلول تحویلی توسط فلاسک در معرض سه منبع عدم قطعیت قرار دارد.

الف) عدم قطعیت گواهی‌نامه کالیبراسیون فلاسک؛

ب) تغییرات در به حجم‌رسانی فلاسک؛
پ) اختلاف دمای محلول و فلاسک از دمای کالیبراسیون فلاسک.

کمی‌سازی منابع عدم قطعیت

✓ غلظت: خلوص کادمیوم در گواهی‌نامه آن 0.9999 ± 0.0001 است.

با توزیع مستطیلی داریم:

$$U(p) = \frac{0.0001}{\sqrt{3}} = 0.000058$$

✓ جرم m:

با استفاده از گواهی کالیبراسیون ترازو، عدم قطعیت ترازو 0.05 mg است.

✓ حجم V:

$$100 \text{ mL} \pm 0.1 \text{ mL}$$

الف- سازنده، حجم فلاسک را در دمای 20°C ، $100 \text{ mL} \pm 0.1 \text{ mL}$ اعلام کرده است. چون سطح اطمینان و تابع توزیع آن مشخص نیست با فرض توزیع مثلی داریم:

$$\frac{0.1 \text{ mL}}{\sqrt{6}} = 0.04 \text{ mL}$$

ب- تکرارپذیری

پس از ده بار تکرار در به حجم‌رسانی فلاسک، انحراف معیار 0.02 mL حاصل شده است.

پ- دما

با توجه به کالیبراسیون فلاسک در دمای 20°C و تغییرات دمای آزمایشگاه به اندازه $4^\circ \text{C} \pm$ و از آن جایی که ضریب انبساط حجمی آب، یعنی، $21 \times 10^{-4} / ^\circ \text{C}$ از ضریب انبساط حجمی فلاسک بزرگتر است در این صورت تغییرات حجم به صورت: $0.084 \text{ mL} = (100 \times 4 \times 21 \times 10^{-4}) \pm$ خواهد بود. توزیع این منبع مستطیلی است.

$\frac{U(x)}{x}$	$U(x)$	مقدار	منبع عدم قطعیت
$\cdot/000058$	$\cdot/000058$	$\cdot/9999$	خلوص فلز (p)
$\cdot/0005$	$\cdot/5 \text{ mg}$	$100/28$	جرم فلز (m)
$\cdot/0007$	$\cdot/07 \text{ mL}$	$100/0$	حجم فلاسک (mL)

خلوص فلز (p)

$$\frac{\cdot/084 \text{ mL}}{\sqrt{3}} = \cdot/05 \text{ mL}$$

سه منبع در عدم قطعیت استاندارد $U(V)$ وجود دارد.

$$U(V) = \sqrt{\cdot/04^2 + \cdot/02^2 + \cdot/05^2} = \cdot/07 \text{ mL}$$

بنابراین:

$$C_{cd} = \frac{1000 \times m \times p}{V} = \frac{1000 \times 100/28 \times \cdot/9999}{100/0} = 1002/7 \text{ mgL}^{-1}$$

$$\frac{U_c(C_{cd})}{C_{cd}} = \sqrt{\left(\frac{U(p)}{p}\right)^2 + \left(\frac{U(m)}{m}\right)^2 + \left(\frac{U(V)}{V}\right)^2}$$

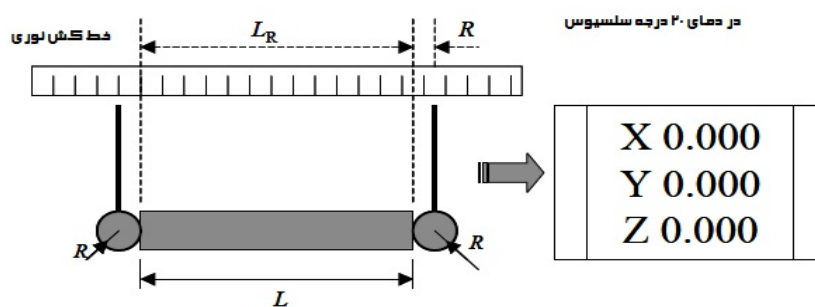
$$= \sqrt{\cdot/000058^2 + \cdot/0005^2 + \cdot/0007^2} = \cdot/0009$$

$$U_c(C_{cd}) = C_{cd} \times \cdot/0009 = 1002/7 \text{ mgL}^{-1} \times \cdot/0009 = \cdot/9 \text{ mgL}^{-1}$$

$$U_c(C_{cd}) = 2 \times \cdot/9 = 1/8 \text{ mgL}^{-1}$$

مثال ۷: عدم قطعیت اندازه‌گیری دستگاه CMM

CMM یکی از دستگاه‌های اندازه‌گیری ابعادی متداول در صنایع مختلف خصوصاً صنعت خودروسازی است. در سال‌های اخیر تحقیقات زیادی در ارتباط با تحلیل عدم قطعیت نتایج اندازه‌گیری CMM صورت پذیرفته است. اصول اندازه‌گیری CMM در شکل زیر نشان داده شده است.



اندازه‌گیری با CMM

دمای مرجع در CMM، 20°C است.

مدل ریاضی اندازه‌گیری با CMM به صورت زیر است:

$$L(1 + \alpha\theta) = L_R(1 + \alpha_g\theta_g) + 2R(\alpha_g\theta_g - \alpha_p\theta_p) + \Delta L \quad (1)$$

به طوری که:

L = اندازه ده (طول تحت آزمون در دمای 20°C)

L_R = قرائت CMM در دمای 20°C

ΔL = کالیبراسیون محوری CMM

R = شعاع پراب در 20°C

$\alpha, \alpha_g, \alpha_p$ = ضریب انبساط گرمایی تحت آزمون، خط‌کش اپتیکی و پراب

$\theta, \theta_g, \theta_p$ = انحراف‌های دمایی تحت آزمون، خط‌کش، و پراب از 20°C

با توجه به این که متغیرهای θ ، θ_g و θ_p به هم وابسته‌اند، تبدیلات زیر را به منظور

مستقل شدن آن‌ها انجام می‌دهیم.

$$\delta\theta_g = \theta_g - \theta$$

$$\delta\alpha_g = \alpha_g - \alpha$$

$$\delta\theta_p = \theta_p - \theta$$

$$\delta\alpha_p = \alpha_p - \alpha$$

بنابراین:

$$\theta_g = \delta\theta_g + \theta$$

$$\alpha_g = \delta\alpha_g + \alpha$$

$$\theta_p = \delta\theta_p + \theta$$

$$\alpha_p = \delta\alpha_p + \alpha$$

پس از ساده‌تر کردن رابطه ۱ مقادیر فوق را در آن قرار داده و از جملات با درجات بالاتر صرف‌نظر می‌کنیم.

$$L = L_R \frac{1 + \alpha_g \theta_g}{1 + \alpha\theta} + 2R \frac{\alpha_g \theta_g - \alpha_p \theta_p}{1 + \alpha P} + \frac{\Delta L}{1 + \alpha\theta}$$

$$L = L_R (1 + \alpha_g \theta_g) (1 - \alpha\theta) + 2R (\alpha_g \theta_g - \alpha_p \theta_p) (1 - \alpha\theta) + \Delta L (1 - \alpha\theta)$$

$$L = L_R (1 - \alpha\theta + \alpha_g \theta_g) + 2R (\alpha_g \theta_g - \alpha_p \theta_p) + \Delta L (1 - \alpha\theta)$$

$$L = L_R (1 + \delta\alpha_g \cdot \delta\theta_g + \theta \cdot \delta\alpha_g + \alpha \delta\theta_g + \alpha\theta - \alpha\theta) +$$

$$2R (\delta\alpha_g \cdot \delta\theta_g + \theta \delta\alpha_g + \alpha \delta\theta_g + \alpha\theta - \delta\alpha_p \cdot \delta\theta_p - \theta \delta\alpha_p - \alpha \delta\theta_p - \alpha\theta) + \Delta L (1 - \alpha\theta)$$

$$L = L_R (1 + \theta \cdot \delta\alpha_g + \alpha \cdot \delta\theta_g) + 2R [\theta (\delta\alpha_g - \delta\alpha_p) + \alpha (\delta\theta_g - \delta\theta_p)] + \Delta L (1 - \alpha\theta) \quad (3)$$

و یا:

$$L = f(L_R, R, \Delta L, \alpha, \delta\alpha_g, \delta\alpha_p, \theta, \delta\theta_g, \delta\theta_p)$$

عدم قطعیت اندازه‌گیری مرکب به صورت زیر خواهد شد:

$$\begin{aligned}
 U_C^2(L) &= \left(\frac{\partial L}{\partial L_R} \right)^2 U^2(L_R) + \left(\frac{\partial L}{\partial R} \right)^2 U^2(R) + \left(\frac{\partial L}{\partial \Delta L} \right)^2 \\
 &U^2(\Delta L) + \left(\frac{\partial L}{\partial \alpha} \right)^2 U^2(\alpha) + \left(\frac{\partial L}{\partial \delta \alpha_g} \right)^2 U^2(\delta \alpha_g) + \left(\frac{\partial L}{\partial \delta \alpha_p} \right)^2 U^2(\delta \alpha_p) + \\
 &\left(\frac{\partial L}{\partial \theta} \right)^2 U^2(\theta) + \left(\frac{\partial L}{\partial \delta \theta_g} \right)^2 U^2(\delta \theta_g) + \left(\frac{\partial L}{\partial \delta \theta_p} \right)^2 U^2(\delta \theta_p)
 \end{aligned}$$

ضرایب حساسیت به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$\frac{\partial L}{\partial L_R} = 1 + \theta \cdot \delta \alpha_g + \alpha \cdot \delta \theta_g$$

$$\frac{\partial L}{\partial R} = 2\alpha(\delta \theta_g - \delta \theta_p) + 2\theta(\delta \alpha_g - \delta \alpha_p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \Delta L} = 1 - \alpha\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = L_R \delta \alpha_g + 2R(\delta \alpha_g - \delta \alpha_p) - \alpha \Delta L$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = L_R \delta \theta_g - \Delta L \theta + 2R(\delta \theta_g - \delta \theta_p)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta \theta_g} = (L_R + 2R)\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta \alpha_g} = (L_R + 2R)\theta$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta \theta_p} = -2R\alpha$$

$$\frac{\partial L}{\partial \delta \alpha_p} = -2R\theta$$

با توجه به مقادیر زیر:

$$L_R = 0.04m, \Delta L = 1.6 \times 10^{-6}m, R = 0.003m$$

$$\alpha = 11.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}, \delta \alpha_g = 3.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}, \delta \alpha_p = -6.5 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ C^{-1}$$

$$\theta = 1 \text{ } ^\circ C \quad \delta \theta_p = 0.2 \text{ } ^\circ C \quad \delta \theta_g = 0.2 \text{ } ^\circ C$$

عدم قطعیت استاندارد مرکب برابر است با:

$$U_C = \left(0.143^2 + 1.162^2 + 0.04^2 + 0.004^2 + 0.192^2 + 0.559^2 + 0.378^2 + 0.0056^2 \right)^{1/2}$$

$$U_C = \left(0.020 + 1.350 + 0.0016 + 0.000016 + 0.0368 \right.$$

$$\left. + 0.3124 + 0.1428 + 0.003136 \right)^{1/2} = 1.36 \text{ } \mu m$$

$$U_e = 2 \times 1.36 = 2.72 \text{ } \mu m$$

مثال ۸: مقاومت یک سیم مسی با رابطه زیر تعیین می‌شود.

$$R = R_0 (1 + \alpha (T - 20))$$

$$\alpha = 0.004 \text{ } ^\circ C^{-1} \pm 0.1 \text{ و } 20 \text{ } ^\circ C \text{ مقاومت در دمای } R_0 = 6 \text{ } \Omega \pm 0.3$$

ضریب دمایی مقاومت و $T = 30 \pm 1 \text{ } ^\circ C$ دمای سیم است. مقاومت سیم و عدم قطعیت آن را

محاسبه کنید.

$$R = 6 [1 + (0.004)(30 - 20)] = 6.24 \Omega$$

$$U^2(R) = \left(\frac{\partial R}{\partial R_0} U_{R_0} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial \alpha} U_{\alpha} \right)^2 + \left(\frac{\partial R}{\partial T} U_T \right)^2$$

$$\frac{\partial R}{\partial R_0} = 1 + \alpha(T - 20) = 1 + (0.004)(30 - 20) = 1.04$$

$$\frac{\partial R}{\partial \alpha} = R_0(T - 20) = 6(30 - 20) = 60$$

$$\frac{\partial R}{\partial T} = R_0 \alpha = (6)(0.004) = 0.024$$

$$U_{R_0} = (6)(0.003) = 0.018 \Omega$$

$$U_{\alpha} = (0.004)(0.01) = 4 \times 10^{-5} {}^{\circ}C^{-1}$$

$$U_T = 1 {}^{\circ}C$$

$$U^2(R) = \left[(1.04)^2 (0.018)^2 + (60)^2 (4 \times 10^{-5})^2 + (0.024)^2 (1)^2 \right]$$

$$U(R) = 0.0305 \Omega = \frac{0.0305}{6.24} = \%0.49$$

مثال ۹: مقاومت اسمی یک عنصر الکتریکی $10 \pm 1\% \Omega$ است.

با اعمال ولتاژی به دو سر مقاومت، توان تلف شده به دو روش محاسبه می‌شود. یکی از

$P = \frac{V^2}{R}$ و دیگری $P = VI$ اگر مقادیر V و I به صورت زیر باشند عدم قطعیت توان را برآورد کنید.

$$V = 100V \pm 1\%$$

$$I = 10A \pm 1\%$$

$$P = \frac{V^2}{R} \Rightarrow U^2(P) = \left(\frac{\partial P}{\partial V} U_V \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial R} U_R \right)^2$$

$$U^2(P) = \left(\frac{2V}{R} U_v \right)^2 + \left(\frac{-V}{R^2} U_R \right)^2$$

و یا:

$$\left(\frac{U(P)}{P} \right)^2 = 4 \left(\frac{U_v}{V} \right)^2 + \left(\frac{U_R}{R} \right)^2$$

$$= \left[4(0.01)^2 + (0.01)^2 \right] \Rightarrow \frac{U(P)}{P} = \%2.2$$

$$P = V.I \Rightarrow U^2(P) = \left(\frac{\partial P}{\partial V} U_v \right)^2 + \left(\frac{\partial P}{\partial I} U_I \right)^2$$

$$U^2(P) = (IU_v)^2 + (VU_I)^2$$

$$\left(\frac{U(P)}{P} \right)^2 = \left(\frac{U(V)}{V} \right)^2 + \left(\frac{U_I}{I} \right)^2 = (0.01)^2 + (0.01)^2$$

$$\frac{U(P)}{P} = \%1.4$$

مثال ۱۰: آزمایشی را در نظر بگیرید که در آن اختلاف فشار بر حسب kpa قرائت می‌شود.

۴/۹۷، ۵/۰۲، ۴/۹۲، ۴/۹۴، ۴/۹۸، ۴/۹۹، ۴/۹۷، ۴/۹۳، ۴/۹۳، ۵/۰۰، ۴/۹۸، ۴/۹۲، ۴/۹۱، ۵/۰۶
۴/۹۲، ۵/۰۴، ۵/۰۰، ۵/۰۱، ۴/۹۸

گستره‌ای را تعیین کنید که اگر فشار دیگری را اندازه‌گیری کنیم با سطح اطمینان ۹۵٪ در آن گستره قرار بگیرد.

$$\bar{P} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{19} P_i = \frac{1}{19} \sum_{i=1}^{19} P_i = 4.97 \text{ kpa}$$

$$S_p = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N (P_i - \bar{P})^2} = \sqrt{\frac{1}{19-1} \sum_{i=1}^{19} (P_i - \bar{P})^2} = 0.046 \text{ kpa}$$

$$v = N - 1 = 18 \Rightarrow t_{v,p} = t_{18,95} = 2.01$$

$$P_i = \bar{P} \pm t_{v,p} \cdot S_p \Rightarrow P_i = 4.97 \pm 0.10 (\%95)$$

بنابراین برآورد می‌شود که اندازه‌گیری فشار بعدی در گستره ۵/۰۷ kpa تا ۴/۸۷ kpa با سطح اطمینان ۹۵٪ قرار داشته باشد.

اگر نمونه را با ۵ اندازه‌گیری که انحراف معیار و میانگین آن مشابه فوق باشد انجام دهیم در این صورت:

$$t_{v,p} = t_{4,95} = 2.770 \Rightarrow P_i = 4.97 \pm 0.13 (\%95)$$

در این حالت گستره برآورد شده برای اندازه‌گیری بعدی ۵/۱۰ kpa تا ۴/۸۴ kpa با سطح اطمینان ۹۵٪ است. بنابراین با سطح اطمینان یکسان نمونه‌های کوچکتر عدم قطعیت اندازه‌گیری بزرگتری دارند. حال اگر برای اولین نمونه سطح اطمینان را ۵۰٪ در نظر بگیریم داریم:

$$t_{v,p} = t_{18,50} = 0.668 \Rightarrow P_i = 4.97 \pm 0.03 (\%50)$$

اندازه‌گیری بعدی در گستره ۵/۰۰ kpa تا ۴/۹۴ kpa با سطح اطمینان ۵۰٪ قرار دارد. بنابراین برای نمونه‌های مشابه اما با سطح اطمینان کوچکتر، گستره عدم قطعیت باریکتر می‌شود.

مثال ۱۱: در مثال ۱۰ گستره‌ای را که مقدار میانگین واقعی اختلاف فشار در آن قرار دارد برآورد کنید.

$$P' = \bar{P} \pm t_{v,p} \cdot S_{\bar{P}} = \bar{P} \pm t_{v,p} \cdot \frac{S_p}{\sqrt{N}}$$

$$P' = 4.97 \pm \frac{(2.101)(0.046)}{\sqrt{19}} = 4.97 \pm 0.02 (\%95)$$

مقدار میانگین واقعی با سطح اطمینان ۹۵٪ در گستره ۴/۹۹ kpa تا ۴/۹۵ kpa قرار دارد.

مثال ۱۱ فرض کنید پنج برآورد برای انحراف معیار S_x به شرح زیر داریم.

S_x	۳۲۵	۲۹۷	۳۰۱	۲۸۰	۲۹۱
v	۱۵	۱۲	۲۲	۳	۷

الف- در مقادیر فوق بهترین برآورد S_x کدام است؟

پاسخ: ۳۰۱

ب) عدم قطعیت مربوط به خطای تصادفی را برای هر یک محاسبه کنید.

$$U = \frac{t_{95} S_x}{\sqrt{n}} \Rightarrow U_1 = \frac{2.131 \times 325}{\sqrt{16}} = 173$$

$$U_2 = \frac{2.179 \times 297}{\sqrt{13}} = 179$$

$$U_3 = \frac{2.074 \times 301}{\sqrt{23}} = 130$$

$$U_4 = \frac{3.182 \times 380}{\sqrt{4}} = 445$$

$$u_s = \frac{2.365 \times 291}{\sqrt{8}} = 243$$

$$S_{pooled} = \frac{\sum (s_{x,i}^2 \cdot \nu_i)^{1/2}}{(\sum \nu_i)^{1/2}}$$

$$S_{pooled} = \frac{(325^2 \times 15 + 297^2 \times 12 + 301^2 \times 22 + 280^2 \times 3 + 291^2 \times 7)^{1/2}}{(15 + 12 + 22 + 3 + 7)^{1/2}} = 304$$

$$\nu_{pooled} = \sum \nu_i = 59$$

مثال ۱۲: کالیبراسیون دماسنج

یک دماسنج با مقایسه قرائت‌های t_k دماسنج در $n=11$ نقطه که عدم قطعیت آن‌ها ناچیز است با دماهای مرجع $t_{R,k}$ در گستره 21°C تا 27°C انجام می‌شود. مقادیر تصحیح از رابطه $b_k = t_{R,k} - t_k$ مشخص می‌شود. در فرآیند کالیبراسیون مقادیر b_k و t_k کمیت‌های ورودی هستند. یک منحنی کالیبراسیون به صورت $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ از روش کمترین مربعات جهت تعیین تصحیح‌ها و دماها بکار می‌رود و پارامترهای y_1 و y_2 که به ترتیب عرض از مبدا و

شیب منحنی کالیبراسیون هستند، دو اندازه یا کمیت های خروجی‌اند که باید تعیین شوند. دمای b_0 دمای مرجع است و کمیتی نیست که از طریق روش کمترین مربعات تعیین شود. از رابطه (۱) می‌توان در پیش‌بینی مقدار تصحیح و عدم قطعیت آن در دمای t استفاده کرد. در این مثال از روش کمترین مربعات جهت به دست آوردن یک منحنی کالیبراسیون خطی و چگونگی تعیین شیب عرض از مبدأ و برآورد واریانس و کوواریانس آن‌ها استفاده می‌شود. همچنین با استفاده از منحنی عدم قطعیت استاندارد تصحیح پیش‌بینی شده برآورد خواهد شد.

روش کمترین مربعات

بر اساس روش کمترین مربعات کمیت‌های خروجی y_1 و y_2 و کوواریانس واریانس‌های برآورد شده‌ی آن‌ها با کمینه کردن رابطه زیر محاسبه می‌شود.

$$S = \sum_{k=1}^n [b_k - y_1 - y_2(t_k - t_0)]^2$$

در این صورت روابط زیر برای y_1 و y_2 ، واریانس‌های تجربی آن‌ها $s^2(y_1)$ و $s^2(y_2)$ و

ضریب همبستگی برآوردشده‌ی آن‌ها $r(y_1, y_2) = \frac{S(y_1, y_2)}{S(y_1) \cdot S(y_2)}$ که $S(y_1, y_2)$ کوواریانس برآورد شده آن‌هاست، به دست می‌آید.

$$y_1 = \frac{(\sum b_k)(\sum \theta_k^2) - (\sum b_k \theta_k)(\sum \theta_k)}{D}$$

$$y_2 = \frac{n \sum b_k \theta_k - (\sum b_k)(\sum \theta_k)}{D}$$

$$S^2(y_1) = \frac{S^2 \sum \theta_k^2}{D}$$

$$S^2(y_2) = n \frac{S^2}{D}$$

$$r(y_1, y_2) = \frac{\sum \theta_k}{\sqrt{n \sum \theta_k^2}}$$

$$S^2 = \frac{\sum [b_k - b(t_k)]^2}{n - 2}$$

$$D = n \sum_{k=1}^n \theta_k^2 - \left(\sum \theta_k \right)^2 = n \sum (\theta_k - \bar{\theta})^2 = n \sum (t_k - \bar{t})^2$$

که در آن:

$$\theta_k = t_k - t_0, \quad \bar{\theta} = \frac{\sum \theta_k}{n}, \quad \bar{t} = \frac{\sum t_k}{n}$$

$b_k - b(t_k)$ اختلاف بین تصحیح مشاهده شده یا اندازه‌گیری شده b_k در دمای t_k و تصحیح پیش‌بینی شده $b(t_k)$ توسط منحنی $b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$ است. واریانس S^2 معیاری از عدم قطعیت کل و عامل $n - 2$ نشان دهنده‌ی این موضوع است که چون با استفاده از n مشاهده پارامترهای y_1 و y_2 محاسبه می‌شوند درجه آزادی S^2 برابر با $U = n - 2$ می‌شود.

محاسبه نتایج

با توجه به روابط فوق و این که $t_0 = 20^\circ \text{C}$ دمای مرجع است جدول و مقادیر زیر محاسبه می‌شوند.

$$S(y_1) = 0.0029^\circ \text{C}$$

$$y_1 = -1/1712^\circ \text{C}$$

$$S(y_2) = 0.0067$$

$$y_2 = 0.00218$$

$$S = 0.0035^\circ \text{C}$$

$$r(y_1, y_2) = -0.930$$

شماره قرائت k	دمای دماسنج $t_k (^{\circ}C)$	تصحیح مشاهده شده $b_k = t_{R,k} - t_k (^{\circ}C)$	تصحیح پیش‌بینی شده $n(t_k) (^{\circ}C)$	اختلاف بین تصحیح مشاهده شده و پیش‌بینی شده $b_k - b(t_k) (^{\circ}C)$
۱	۲۱٫۱۵۲	-۰٫۱۷۱	-۰٫۱۶۷۱	-۰٫۰۰۳۱
۲	۲۲٫۰۱۲	-۱٫۱۶۹	-۰٫۱۶۶۸	-۰٫۰۰۲۲
۳	۲۲٫۵۱۲	-۰٫۱۶۶	-۰٫۱۶۵۷	-۰٫۰۰۰۳
۴	۲۳٫۰۰۳	-۰٫۱۵۹	-۰٫۱۶۴۶	+۰٫۰۰۵۶
۵	۲۳٫۵۰۷	-۰٫۱۶۴	-۰٫۱۶۳۵	-۰٫۰۰۰۵
۶	۲۳٫۹۹۹	-۰٫۱۶۵	-۰٫۱۶۲۵	-۰٫۰۰۲۵
۷	۲۴٫۵۱۳	-۰٫۱۵۶	-۰٫۱۶۱۴	+۰٫۰۰۵۴
۸	۲۵٫۰۰۲	-۰٫۱۵۷	-۰٫۱۶۰۳	+۰٫۰۰۳۳
۹	۲۵٫۵۰۳	-۰٫۱۵۹	-۰٫۱۵۹۲	+۰٫۰۰۰۲
۱۰	۲۶٫۰۱۰	-۰٫۱۶۱	-۰٫۱۵۸۱	-۰٫۰۰۲۹
۱۱	۲۶٫۵۱۱	-۰٫۱۶۰	-۰٫۱۵۷۰	-۰٫۰۰۳۰

مقادیر مورد استفاده جهت تعیین منحنی کالیبراسیون خطی برای دماسنج با استفاده از روش کمترین مربعات

بنابراین منحنی کالیبراسیون را می‌توان به این صورت نوشت:

$$b(t) = -0.1712(29)^{\circ}C + 0.00218(67)(t - 20^{\circ}C) \quad (2)$$

اعداد داخل پرانتز بیانگر عدم قطعیت‌های استاندارد مربوط به آخرین ارقام نتایج بیان شده‌ی شیب و عرض از مبدا است. با این رابطه می‌توان تصحیح $b(t)$ در هر دمای t و مقدار $b(t_k)$ در $t = t_k$ را پیش‌بینی نمود. این مقادیر در ستون چهارم و اختلاف آن‌ها در ستون پنجم قابل مشاهده است.

عدم قطعیت مقدار پیش‌بینی شده

بیان عدم قطعیت استاندارد مرکب پیش‌بینی شده برای تصحیح با اعمال قانون انتشار عدم قطعیت قابل حصول است. با توجه به رابطه‌های:

$$U_C^2 = \sum_{i=1}^N C_i^2 U^2(x_i) + 2 \sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N C_i C_j U(x_i) U(x_j) r(x_i, x_j) \quad (3)$$

$$b(t) = y_1 + y_2(t - t_0)$$

و با توجه به این که:

$$b(t) = f(y_1 + y_2)$$

$$U(y_1) = S(y_1)$$

$$U(y_2) = S(y_2)$$

داریم:

$$U_C^2[b(t)] = U^2(y_1) + (t - t_0)^2 U^2(y_2) + 2(t - t_0) U(y_1) U(y_2) r(y_1, y_2)$$

واریانس برآورد شده $U_C^2[b(t)]$ در $t_{\min} = t_0 - \frac{U(y_1) r(y_1, y_2)}{U(y_2)}$ کمینه است. این مقدار

برابر است با:

$$t_{\min} = 24.0085^\circ C$$

به عنوان یک مثال از رابطه‌ای که برای $U_C^2[b(t)]$ به دست آوردیم، فرض کنید که تصحیح دماسنج و عدم قطعیت آن در دمای $t = 3^\circ C$ مورد نیاز است. این دما خارج از گستره‌ی کالیبراسیون دماسنج است و با استفاده از رابطه زیر داریم:

$$b(t) = -0.1712(29)^\circ C + 0.00218(67)(t - 20^\circ C)$$

$$b(30^\circ C) = -0.1494^\circ C$$

$$U_C^2[b(30^\circ C)] = (0.0029^\circ C)^2 + (10^\circ C)^2 (0.00067)^2 + 2(10)(0.0029^\circ C)$$

$$\times (0.00067)(-0.930) = 17.1 \times 10^{-6} \text{ } ^\circ\text{C}$$

$$U_c [b(30^\circ\text{C})] = 0.0041^\circ\text{C}$$

بنابراین تصحیح در 30°C برابر است با 0.1494°C با عدم قطعیت استاندارد مرکب

$$U_c = 0.0041^\circ\text{C} \text{ و درجه آزادی } \nu = n - 2 = 9.$$

حذف همبستگی بین شیب و عرض از مبدأ

با توجه به رابطه $r(y_1, y_2) = -\frac{\sum \theta_k}{\sqrt{\sum \theta_k^2}}$ ، اگر t_0 طوری انتخاب شود که

$$\sum_{k=1}^N \theta_k = \sum_{k=1}^N (t_k - t_0) = 0$$

در این صورت $r(y_1, y_2)$ و y_1, y_2 غیرهمبسته بوده و محاسبه

$$t_0 = \bar{t} = \frac{\sum_{k=1}^N t_k}{n}$$

عدم قطعیت استاندارد مربوط به پیش‌بینی تصحیح ساده‌تر خواهد شد. اگر:

باشد $\sum_{k=1}^N \theta_k = 0$ ، در این حالت $\bar{t} = 24/0.085^\circ\text{C}$ است. اگر عملیات روش حداقل مربعات را با

شرط $t_o = \bar{t} = 24/0.085^\circ\text{C}$ تکرار کنیم مقادیر y_1, y_2 غیرهمبسته خواهند بود (ضمناً دمای $\bar{t}$ دمایی است که $U^2[b(t)]$ در آن کمینه است) و تکرار این عملیات ضرورتی ندارد چون می‌توان نشان داد که:

$$b(t) = y'_1 + y_2(t - \bar{t})$$

$$U_c^2[b(t)] = U^2(y'_1) + (t - \bar{t})^2 U^2(y_2)$$

$$r = (y'_1, y_2) = 0$$

به طوری که:

$$y'_1 = y_1 + y_2(\bar{t} - t_0)$$

$$t = t_0 - \frac{S(y_1)r(y_1, y_2)}{S(y_2)}$$

$$S^2(y'_1) = S^2(y_1)[1 - r^2(y_1, y_2)]$$

با قرار دادن مقادیر $U(y_2) = S(y_2)$, $U(y'_1) = S(y'_1)$ در $U_C^2[b(t)] = U^2(y'_1) + (t + \bar{t})^2 U^2(y_2)$ معادله‌ی زیر حاصل می‌شود:

$$U_C^2[b(t)] = U^2(y_1) + (t - t_0)^2 U^2(y_2) + 2(t - t_0)U(y_1)U(y_2)r(y_1, y_2)$$

اعمال این مقادیر نتایج زیر را سبب می‌شوند.

$$b(t) = -0.1625(11) + 0.00218(67) + (t - 24.0085^\circ\text{C})$$

$$U_C^2[b(t)] = (0.0011)^2 + (t - 24.0085^\circ\text{C})^2 (0.00067)^2$$

این عبارات نتیجه یکسانی را با معادلات (۲) و (۳) دارند. این موضوع را می‌توان با محاسبه $b(30^\circ\text{C})$ و $U_C[b(30^\circ\text{C})]$ در روابط فوق بررسی کرد.

$$b(30^\circ\text{C}) = -0.1494^\circ\text{C}$$

$$U_C[b(30^\circ\text{C})] = 0.0041^\circ\text{C}$$

کوواریانس بین مقادیر تصحیح پیش‌بینی شده $b(t_1)$ و $b(t_2)$ از رابطه زیر قابل حصول است.

$$U(y_l, y_m) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial y_l}{\partial x_i} \frac{\partial y_m}{\partial x_j} U(x_i)U(x_i)U(x_j)r(x_i, x_j)$$

سایر ملاحظات

روش حداقل مربعات را می‌توان برای منحنی با درجه‌ی بالاتر نیز بکار برد. ضمناً داده‌ها می‌توانند عدم قطعیت‌های غیرقابل صرف‌نظر کردن هم داشته باشند. در زیر به مواردی می‌پردازیم

که در آن تصحیح‌های اندازه‌گیری شده b_k را می‌توان فرض کرد که کاملاً معلوم و مشخص نباشند.

(۱) فرض کنید که عدم قطعیت t_k ناچیز باشد و فرض کنید که هر n مقدار $t_{R,k}$ از m سری مشاهده تعیین شده‌اند و برآورد واریانس ادغام شده S_p^2 چنین قرائت‌هایی بر اساس تعداد زیادی از داده‌های حاصل از چندین ماه انجام شده است. واریانس برآورد شده هر $t_{R,k}$ برابر است با $U_0^2 = \frac{S_p^2}{m}$ و در تصحیح مشاهده شده $b_k = t_{R,k} - t_k$ عدم قطعیت استاندارد U_0 مشابهی دارد و تحت این شرایط - و همچنین این که هیچ دلیلی مبنی بر این که مدل خطی درست نباشد وجود ندارد - U_0^2 در معادلات زیر با S^2 تعویض می‌شود.

$$S^2(y_1) = \frac{S^2 \sum \theta_k^2}{D}$$

$$S^2(y_2) = n \frac{S^2}{D}$$

یادآوری: برآورد واریانس S_p^2 بر اساس n مشاهده از متغیرهای تصادفی و مستقل به صورت زیر می‌باشد:

$$S_p^2 = \frac{\sum_{i=0}^N N_i S_i^2}{\sum_{i=0}^N \nu_i}$$

که S_i^2 واریانس تجربی مربوط به مجموعه i -ام از n_i مشاهده تکراری مستقل با درجه آزادی $\nu = n_i - 1$ است. درجه‌ی آزادی S_p^2 برابر است با $\nu = \sum_{i=1}^N \nu_i$ واریانس تجربی $\frac{S^2 P}{m}$ - و

انحراف معیار تجربی $\frac{Sp}{\sqrt{m}}$ - میانگین عددی m مشاهده مستقل که با واریانس $S^2 P$ مشخص می‌شود دارای درجه‌ی آزادی ν است.

(۲) فرض کنید عدم قطعیت هر مقدار t_k ناچیز باشد و به هر مقدار n مقدار $t_{R,k}$ تصحیح اعمال شود و عدم قطعیت هر تصحیح U_a است. عدم قطعیت استاندارد هر

با $S^2(y_1) + U_a^2$ است و $b_k = t_{R,k} - t_k$ همان U_a است و $S^2(y_1)$ با $S^2(y_1) + U_a^2$ جابجا می‌شود.

مثال ۱۳: عدم قطعیت تعیین ضریب تصحیح K در کالیبراسیون فلومترهای توربینی

یکی از دستگاه‌های اندازه‌گیری بسیار مهم فلومترهای توربینی است که در سیستم‌های میترینگ مورد استفاده قرار می‌گیرد. مطالعات نشان می‌دهند که عدم قطعیت اندازه‌گیری این دستگاه از مولفه‌های زیادی تشکیل می‌شود. هریک از این مولفه‌های دخیل در عدم قطعیت باید جداگانه مورد بررسی و ارزیابی قرار گیرند. در این مثال فقط یکی از این مولفه‌ها یعنی ضریب تصحیح K که در آزمایشگاه‌های کالیبراسیون برای هر فلومتر توربینی باید تعیین گردد، بررسی شده است.

ضریب تصحیح K

برای به دست آوردن ضریب تصحیح مربوط به شرایط استاندارد، باید حجم فیزیکی prover و حجم مایع آن مطابق شرایط استاندارد، تصحیح شوند. برای این کار باید از ضرایب تصحیح حجمی فولاد زنگ نزن و ضرایب تصحیح حجمی مایعات استفاده نمود. همچنین تعداد پالس‌های شمارش شده توسط فلومتر به حجم عبوری از آن بستگی دارد. بنابراین ضرایب تصحیح حجمی مایع باید در شمارش پالس‌ها در شرایط استاندارد مربوط به فرآیند proving هم اعمال شود. علاوه بر این، ضریب تصحیح حجمی در تصحیح اثرات دمایی چگالی مایع در شرایط استاندارد و تبدیل چگالی خط به چگالی شرایط استاندارد نیز مورد استفاده قرار می‌گیرد.

مدل ریاضی ضریب K

مدل ریاضی مورد استفاده برای ضریب K که تحت شرایط استاندارد تصحیح شده است به صورت زیر می‌باشد.

$$k = \frac{MR_p (C_{tsm} \cdot C_{psm}) \cdot (C_{ilm} \cdot C_{plm})}{BV(C_{tsp} \cdot C_{psp}) \cdot (C_{tlp} \cdot C_{plp})}$$

که در آن:

K: ضریب مربوط به تعداد پالس‌های حجم (m^3 /پالس)

MRp	تعداد پالس‌ها در فرایند proving (پالس)
BV	حجم پایه (مرجع) prover (m^3)
C _{tsp}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر دما بر فولاد prover
C _{psp}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر فشار بر فولاد prover
C _{tsm}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر دما بر فولاد توربین
C _{psm}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر فشار بر فولاد توربین
C _{tlp}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر دما بر مایع prover
C _{plp}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر فشار بر مایع prover
C _{tlm}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر دما بر مایع فلومتر توربینی
C _{plm}	ضریب تصحیح حجم مربوط به اثر فشار بر مایع فلومتر توربینی
اگر از ضرایب C _{tsm} و C _{psm} صرف‌نظر کنیم رابطه زیر حاصل می‌شود.	
تنها همبستگی موجود در مدل فوق ناشی از ضرایب تصحیح فشار و دما در میترینگ و proving است. کوواریانس این همبستگی به صورت زیر بیان می‌شود.	

$$k = \frac{MR_p(C_{tsm} \cdot C_{psm})}{BV(C_{tsp} \cdot C_{psp}) \cdot (C_{tlp} \cdot C_{plp})}$$

بزرگی $r(C_{tlm}, C_{tlp})$ بین ۱ و -۱ است. علاوه بر عدم قطعیت‌های مربوط به MRp، BV و ضرایب تصحیح حجمی، عدم قطعیت‌های مربوط به تکرارپذیری و خطی بودن فلومتر نیز در عدم قطعیت مرکب K باید لحاظ شود.

عدم قطعیت ضریب تصحیح

مدل ریاضی عدم قطعیت مربوط به تعیین ضریب K در کالیبراسیون فلومتر توربینی به صورت زیر است.

$$\begin{aligned}
 u_c^2(k) = & S_{k,p_{pa}}^2 u^2(p_{pa}) + S_{k,T_{pa}}^2 u^2(T_{pa}) + S_{k,p_c}^2 u^2(p) + S_{k,p_{ea}}^2 u^2(p_{ea}) + S_{k,p_{ba}}^2 u^2(p_{ba}) \\
 & + S_{k,T_c}^2 u^2(T) + S_{Dp}^2 u^2(Dp) + S_{k,EMP}^2 u^2(EMP) + S_{Tp}^2 u^2(Tp) + S_{k,EM}^2 u^2(EM) \\
 & + S_{k,p_{ref}}^2 u^2(p_{ref}) + S_{k,MRP}^2 u^2(MRP) + S_{k,BV}^2 u^2(BV) + S_{k,C_{psm}}^2 u^2(C_{psm}) + S_{k,C_{tsm}}^2 u^2(C_{tsm}) \\
 & + S_{k,C_{plp}}^2 u^2(C_{plp}) + S_{k,C_{Hp}}^2 u^2(C_{Hp}) + S_{k,C_{isp}}^2 u^2(C_{isp}) + S_{k,C_{psp}}^2 u^2(C_{psp}) + u^2(k_{lin}) + u^2(k_{repl}) \\
 & + u^2(k_{flocm}) + covariance
 \end{aligned} \quad (۴)$$

که در آن:

$u^2(p_{pa})$	عدم قطعیت استاندارد میانگین فشار ورودی و خروجی prover برحسب barg
$u^2(T_{pa})$	عدم قطعیت استاندارد میانگین دمای ورودی و خروجی prover برحسب °C
$u_c^2(p)$	عدم قطعیت استاندارد مرکب اندازه‌گیری فشار خط برحسب bar
$u^2(p_{b_a})$	عدم قطعیت استاندارد فشار استاندارد برحسب kpa
$u_c^2(T)$	عدم قطعیت استاندارد مرکب اندازه‌گیری دمای خط برحسب °C
$u^2(Dp)$	عدم قطعیت اندازه‌گیری قطر داخلی لوله prover برحسب m
$u^2(EMP)$	عدم قطعیت استاندارد مدول‌های کشسانی prover برحسب barg
$u^2(T_p)$	عدم قطعیت اندازه‌گیری ضخامت دیواره prover برحسب m
$u^2(p_{ref})$	عدم قطعیت استاندارد مرکب چگالی مرجع استاندارد برحسب kg/m ³
$u^2(EM)$	عدم قطعیت استاندارد ضریب انبساط حجمی prover برحسب °C ⁻¹
$u^2(MRP)$	عدم قطعیت استاندارد شمارش تعداد پالس در proving برحسب pulses
$u^2(BV)$	عدم قطعیت استاندارد حجم prover برحسب m ³
$u^2(C_{psm})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{psm}
$u^2(C_{tsm})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{tsm}
$u^2(C_{plp})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{plp}
$u^2(C_{Hp})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{tlp}
$u^2(C_{tsp})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{tsp}
$u^2(C_{psp})$	عدم قطعیت استاندارد مربوط به مدل تصحیح حجمی C _{psp}
$u^2(k_{lin})$	عدم قطعیت خطی بودن ضریب برآورد شده K
$u^2(k_{rept})$	عدم قطعیت تکرارپذیری ضریب برآورد شده K
$u^2(k_{flocm})$	عدم قطعیت استاندارد محاسبات نرم افزاری
<i>covariance</i> کوواریانس همبستگی عدم قطعیت‌های مربوط به مدل ضریب تصحیح حجمی	
به دلیل طولانی شدن جمله عدم قطعیت (معادله ۴) از محاسبه ضرایب حساسیت جملات صرفنظر شده است.	

مثال عددی

در جدول زیر نمونه‌ای از منابع دخیل در عدم قطعیت مربوط به ضریب K آورده شده است.

جدول ۱- جدول منابع عدم قطعیت ضریب K

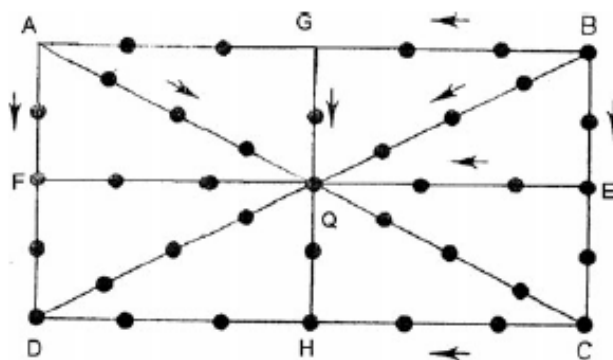
کمیت ورودی	توضیحات	مقدار	عدم قطعیت گسترده (سطح اطمینان ۹۵٪)
p_{pa}	میانگین فشار ورودی و خروجی prover	۱۸ barg	۰/۱۶ bar
T_{pa}	میانگین دمای ورودی و خروجی prover	۶۵ °C	۰/۱۶ °C
P	فشار خط	۱۸ barg	۰/۱۶ bar
p_{ba}	فشار مرجع	۱/۰۱۳۲۵bar	۰/۰ bar
p_{ea}	فشار بخار در دمای مایع تحت اندازه‌گیری	۱/۰۱۳۲۵ bar	۰/۰ bar
T	دمای خط	۶۵ °C	۰/۱۶ °C
DP	قطر داخلی لوله prover	$۴۴۴/۵ \times ۱۰^{-۳}$	٪۷۵ of DP
EMP	مدول‌های کشسانی prover	۲۰۳۴۰۰۰ barg	٪۰/۵ of EMP
TP	ضخامت دیواره prover	۰/۰۱۴۲۷۵m	٪۰/۰۷ of TP
EM	ضریب انبساط حجمی prover	$۰/۰۰۰۰۳۳۵^{\circ}\text{C}^{-1}$	٪۰/۵ of EM
ρ_{ref}	چگالی در دما و فشار استاندارد	$۸۱۲/۴۸\text{kg/m}^3$	$۱/۱۲\text{ kg/m}^3$
MR_p	پالس‌های اندازه‌گیری شده	۹۰۰۹۲	٪۰/۰۰۰۱ of MR_p
BV	حجم prover	$۲۸/۶۴۶\text{m}^3$	$۰/۰۱۱\text{ m}^3$
Flocom	محاسبات نرم‌افزاری	-	٪۰/۰۰۰۱ of ave K
خطی بودن	خطی بودن	-	٪۰/۱۵ of ave K
تکرارپذیری	تکرارپذیری	-	٪۰/۰۲۰ of ave K

جدول ۲ - جدول عدم قطعیت مدل تصحیح حجمی

منبع	عدم قطعیت ورودی			عدم قطعیت مرکب	
	مقدار	مقسوم علیه	عدم قطعیت استاندارد	ضریب حساسیت	واریانس
p_{pa}	0.01568	۲	0.0078	$-4.07 \times 10^{-1} \text{ p/m}^3 \text{ bar}$	$1.02 \times 10^{-5} (\text{p/m}^3)^2$
T_{pa}	0.1565	۲	0.0738	$3.00 \text{ p/m}^3 \text{ }^\circ\text{C}$	$5.51 \times 10^{-7} (\text{p/m}^3)^2$
P	0.01568	۲	0.0078	$3.59 \times 10^{-1} \text{ p/m}^3 \text{ bar}$	$7.93 \times 10^{-6} (\text{p/m}^3)^2$
pb_a	0.0	۱	0.0	$0 \text{ p/m}^3 \text{ bar}$	$0 (\text{p/m}^3)^2$
pe_a	0.0	۱	0.0	$0 \text{ p/m}^3 \text{ bar}$	$0 (\text{p/m}^3)^2$
T	0.1565	۲	0.0738	$-3.10 \text{ p/m}^3 \text{ }^\circ\text{C}$	$5.59 \times 10^{-7} (\text{p/m}^3)^2$
DP	0.01607	۱	1.6×10^{-6}	$-1.95 \text{ p/m}^3 \text{ m}$	$9.77 \times 10^{-12} (\text{p/m}^3)^2$
EMP	50.85	۱	50.85	$4.25 \times 10^{-9} \text{ p/m}^3 \text{ bar}$	$4.67 \times 10^{-18} (\text{p/m}^3)^2$
TP	0.04996	۱	5.0×10^{-6}	$6.06 \times 10^{-1} \text{ p/m}^3 \text{ m}$	$9.16 \times 10^{-10} (\text{p/m}^3)^2$
EM	8.38×10^{-8}	۱	8.38×10^{-8}	$-1.5 \times 10^{-5} \text{ p k}$	$1.72 \times 10^{-10} (\text{p/m}^3)^2$
ρ_{ref}	$1/181$	۲	0.591	0 p/kg	$0 (\text{p/m}^3)^2$
MR_p	0.45046	۱	0.45046	$3.48 \times 10^{-2} \text{ l/m}^3$	$2.46 \times 10^{-10} (\text{p/m}^3)^2$
BV	0.0055	۱	0.0055	$-1.10 \times 10^{-2} \text{ p/m}^3 \text{ m}$	$3.63 \times 10^{-11} (\text{p/m}^3)^2$
C_{plm}	3.0×10^{-4}	۲	1.5×10^{-4}	$3.13 \times 10^{-3} \text{ p/m}^3$	$2.21 \times 10^{-11} (\text{p/m}^3)^2$
C_{tlm}	7.15×10^{-4}	۱	7.15×10^{-4}	$3.29 \times 10^{-3} \text{ p/m}^3$	$5.55 (\text{p/m}^3)^2$
C_{plp}	3.0×10^{-4}	۲	1.5×10^{-4}	$-3.13 \times 10^{-3} \text{ p/m}^3$	$2.21 \times 10^{-11} (\text{p/m}^3)^2$
C_{tlp}	7.15×10^{-4}	۱	7.15×10^{-4}	$-3.29 \times 10^{-3} \text{ p/m}^3$	$5.55 (\text{p/m}^3)^2$
C_{tsp}	0	۱	0	$-3.13 \times 10^{-3} (\text{p/m}^3)^2$	$0 (\text{p/m}^3)^2$
C_{psp}	0	۱	0	$-3.14 \times 10^{-3} (\text{p/m}^3)^2$	$0 (\text{p/m}^3)^2$
خطی بودن	$2/35411 \text{ p/m}^3$	۱	$54112/3$	۱	$5.54 (\text{p/m}^3)^2$
تکرارپذیری	0.31388 p/m^3	۱	0.31388	۱	$9.85 \times 10^{-7} (\text{p/m}^3)^2$
نرم افزار	0.01569 p/m^3	۱	0.01569	۱	$2.46 \times 10^{-10} (\text{p/m}^3)^2$
کوواریانس					$1/1 \times 10^{-1} (\text{p/m}^3)^2$
جمع واریانس‌ها: $6/12 (\text{p/m}^3)^2$ عدم قطعیت استاندارد مرکب: $uc = 2/47 \text{ p/m}^3$ عدم قطعیت گسترده: $U = 4/947 (k=2)$ عدم قطعیت نسبی: $U/K = 0.1576\%$					

مثال ۱۴: عدم قطعیت در کالیبراسیون میز سطح صافی

آزمایشگاه‌های کالیبراسیون اغلب میز سطح صافی را برای کالیبراسیون دریافت می‌کنند. در فرآیند کالیبراسیون مشخص نمودن صفحه‌ای که با نقاط تعیین شده‌ی تجربی برای اندازه‌گیری، بهترین انطباق را داشته باشد، ضروری است. با تعیین چنین صفحه‌ای محاسبه مقدار برآمدگی هر نقطه منفرد روی صفحه از سطح آن و تعیین خطای کلی امکان‌پذیر خواهد بود. ابتدا رابطه‌ای را تعیین می‌کنیم که با استفاده از آن ارتفاع مجموعه نقاط موجود روی سطح اصلی محاسبه می‌شود. معمولاً سطح مورد نظر با اندازه‌گیری در امتداد خطوط خاصی، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در شکل ۱ صفحه‌ای با تعدادی نقطه روی آن که باید ارتفاع آن‌ها اندازه‌گیری شود، نشان داده شده است.

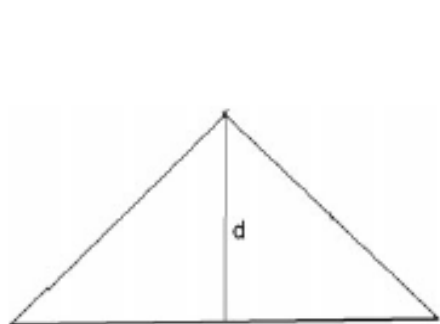


شکل ۱- سطح اندازه‌گیری

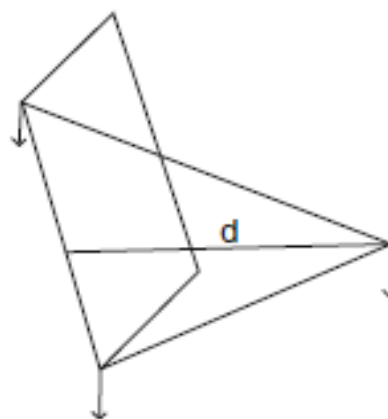
نقاط مشخص شده مکان‌هایی هستند که ارتفاع نقاط آزمون در آن‌ها اندازه‌گیری شده است. تعداد نقاط انتخاب شده بستگی به ابعاد صفحه دارد. ابعاد صفحه مسطح می‌تواند از 300×120 میلی‌متر تا 2000×1200 میلی‌متر متغیر باشد. تعداد نقاط انتخاب شده در امتداد هر خط بستگی به ابعاد صفحه داشته و می‌تواند بین ۶ تا ۲۰ عدد باشد.

برداشت حاصل از آزمون، ارتفاع نقاط منفرد تعیین شده در امتداد خطوط پیش فرض هستند. یکی از روش‌هایی که به کار برده می‌شود استفاده از دستگاه کالیمیتور خودکار و آینه مسطحی است که روی میزی با سه پایه به صورت آویزان نصب شده است. میز به صورت شماتیک در شکل ۲ نشان داده شده است. ارتفاع نقاط برابر است با حاصل ضرب انحراف زاویه‌ای نور منعکس شده از سطح آینه در طول d که این طول برابر فاصله عمودی پایه سوم میز تا خط واصل بین دو پایه دیگر

است و در شکل ۳ نشان داده شده است. در هر بار اندازه‌گیری، آینه نصب شده به اندازه طول ثابتی که معادل فاصله بین نقاط تعیین شده روی خط انتخابی است، جابجا می‌شود. تعداد نقاط تعیین شده در امتداد هر خط همواره یک عدد زوج است. به طور معمول خطوط انتخابی شامل خطوط محیطی شبکه مستطیلی (طول و عرض)، اقطار آن و حداقل دو خط یکی در امتداد طول و دیگری در امتداد عرض شبکه مستطیلی که خطوط محیطی را به دو قسمت تقسیم می‌کنند، می‌باشند.



شکل ۳ پایه تکیه‌گاه آینه

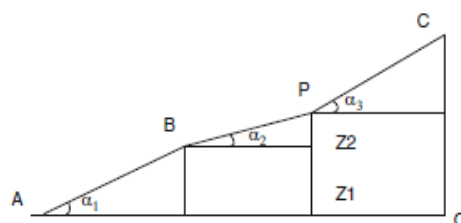


شکل ۲ آینه و پایه‌های آن

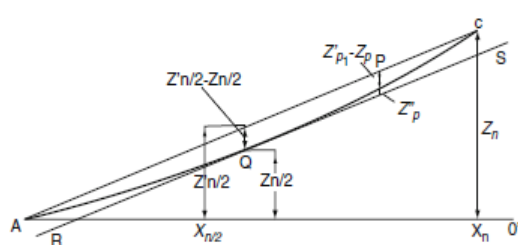
روش کالیبراسیون

- مراحل مختلف اندازه‌گیری ارتفاع نقاط معین در طول خط انتخابی به شرح ذیل می‌باشد.
- ۱- اندازه‌گیری ارتفاع از نقطه‌ای بر روی یکی از اقطار مثلاً A بر روی قطر AC شروع می‌شود؛
- ۲- ارتفاع هر نقطه مشخص شده و به مجموع ارتفاع‌های نقاط قبلی اندازه‌گیری شده اضافه می‌شود. این مقدار برای هر نقطه به صورت یک خط عمود بر محوری افقی که نقاط روی آن نشان‌دهنده فاصله نقاط معین شده از ابتدای خط مورد نظر (قطر AC) هستند، رسم می‌شود؛
- ۳- انتهای هر یک از خطوط قائم ترسیم شده را از نقطه A تا نقطه C به یکدیگر وصل می‌کنیم و منحنی AC ایجاد می‌شود (شکل ۴)؛
- ۴- نقطه A به نقطه C با خط مستقیم AC وصل می‌شود (شکل ۵)؛
- ۵- ارتفاع نقطه میانی خط AC تعیین می‌شود؛
- ۶- خط قائمی از نقطه میانی خط AC رسم شده که در نقطه Q با منحنی AC تلاقی می‌کند؛
- ۷- از نقطه Q خط RS موازی با خط AC رسم می‌شود (شکل ۶)؛

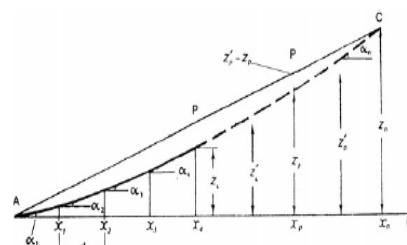
- ۸- فاصله عمودی نقاط متناظر نقاط تعیین شده از منحنی AC تا خط RQS به دست می‌آید. مقادیر به دست آمده ارتفاع نقاط تعیین شده روی قطر AC را نشان می‌دهد؛
- ۹- مراحل یک تا ۳ برای قطر دوم تکرار و خط BD ترسیم می‌شود؛
- ۱۰- ارتفاع نقطه میانی خط BD محاسبه می‌شود؛
- ۱۱- امتداد عمودی این خط در نقطه Q با منحنی BD تلاقی می‌کند؛
- ۱۲- خط $R'S'$ از نقطه Q و به موازات BD رسم می‌شود؛
- ۱۳- فاصله عمودی نقاط انتخابی روی منحنی BD نسبت به خط $R'QS'$ به دست می‌آید. بنابراین ارتفاع نقاط انتخابی روی قطر BD مشخص می‌شود؛
- ۱۴- با این روش ارتفاع کلیه نقاط انتخابی روی دو قطر نسبت به صفحه‌ای که خطوط RQS و $R'QS'$ روی آن قرار دارند به دست می‌آید؛
- ۱۵- این صفحه را صفحه xy می‌نامیم؛
- ۱۶- ارتفاع نقاط A و C نسبت به صفحه xy با یکدیگر برابر خواهد بود که مقدار آن را b در نظر می‌گیریم. ارتفاع نقاط B و D نیز روی قطر BD با یکدیگر برابر خواهد بود که مقدار آن را a در نظر می‌گیریم؛
- ۱۷- مراحل ۱ الی ۸ برای تعیین ارتفاع نقاط در امتداد وجه AB تکرار می‌شود. ارتفاع نقاط A و B از صفحه xy مشخص است، به این ترتیب ارتفاع نقاط از صفحه xy با افزودن فاصله عمودی نقاط نسبت به صفحه xy محاسبه می‌شود؛
- ۱۸- ارتفاع سایر نقاط روی خطوط DC، AD، BC، GH و EF نسبت به صفحه xy با همین روش به دست می‌آید.
- روش مربوط به صورت ریاضی در بخش‌های بعدی ارائه شده است.



شکل ۴ ارتفاع افزایشی نقاط مختلف



شکل ۶ ارتفاع نقطه Q



شکل ۵ منحنی AC

تعیین رابطه‌ای برای محاسبه ارتفاع

• ارتفاع نقطه‌ای روی قطر AC

فرض کنید α_p مقدار خوانده شده توسط دستگاه کالیبریتور برای نقطه p -ام و d فاصله بین پایه سوم تا خط واصل دو پایه دیگر میز آینه باشد. بنابر این ارتفاع نقطه p -ام از خط اختیاری AO بر اساس شکل ۴ از رابطه زیر محاسبه خواهد شد.

$$z_p = \sum_{r=0}^{r=p} d\alpha_r \quad (1)$$

باید در نظر داشت که طبق تعریف α_0 برابر صفر است. فرض کنید آخرین نقطه $C(x_{2n} z_{2n})$ برای $p=2n$ باشد، ارتفاع آن به صورت زیر خواهد بود:

$$z_{2n} = \sum_{r=0}^{r=2n} d\alpha_r \quad (2)$$

ارتفاع نقطه p -ام نقطه P روی خط مستقیم AC برابر است با:

$$z'_p = (p/2n) \sum_{r=0}^{r=2n} d\alpha_r$$

اختلاف ارتفاع بین نقطه p -ام روی منحنی AC و خط مستقیم AC برابر با اختلاف بین z'_p و z_p است و به صورت زیر می‌باشد:

$$z'_p - z_p = (p/2n) \sum_{r=0}^{r=2n} d\alpha_r - \sum_{r=0}^{r=p} d\alpha_r \quad (۳)$$

فرض کنید نقطه میانی روی منحنی، نقطه $Q(x_n, z_n)$ (شکل ۶) است و خط RS را به موازات خط AC (شکل ۵) رسم کرده‌ایم. فاصله خط AC و RS برابر خواهد بود با $z'_n - z_n$ و بنابراین ارتفاع نقطه p -ام یعنی z''_p برابر خواهد شد با:

$$z''_p = z'_n - z_n - (z'_p - z_p) \quad z''_p = \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n} d\alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n} d\alpha_r - \frac{p}{2n} \sum_{r=0}^{r=2n} d\alpha_r + \sum_{r=0}^{r=p} d\alpha_r$$

یا

$$z''_p = d \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r \right] \quad (۴)$$

با قرار دادن مقدار $p=0$ در رابطه ۴ ارتفاع نقطه A به دست خواهد آمد.

$$z''_A = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r \right] = b \quad (۵)$$

به همان صورت با قرار دادن مقدار $p=2n$ در رابطه ۴ ارتفاع نقطه C بدست خواهد آمد.

$$z''_c = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r \right] = b \quad (۵-a)$$

علاوه بر این Z''_n برای نقطه Q برابر صفر خواهد بود.

ارتفاع نقاط در طول قطر BD شکل ۱ به همان صورت نسبت به خط $R'QS'$ محاسبه می‌شود. دو خط RQS و $R'QS'$ صفحه xy را مشخص می‌کنند و فاصله عمودی نقطه Z'' نسبت به این خطوط، فاصله عمودی نقاط روی دو قطر از صفحه xy است.

• ارتفاع نقطه‌ای روی قطر BD

با انجام محاسبات مطابق مراحل فوق، ارتفاع هر نقطه روی قطر BD با استفاده از رابطه زیر مشخص خواهد شد:

$$z_p'' = d \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r' - \frac{p}{2n} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r' + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n} \alpha_r' - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' \right] \quad (۶)$$

که در آن α_r' انحراف از آینه است.

مقدار p در نقطه ابتدای خط B برابر با صفر است بنابراین مقدار a یعنی ارتفاع نقطه B برابر خواهد بود با:

$$a = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{2n} \alpha_r' - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' \right] = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' + \frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{r=2n} \alpha_r' - \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' \right] = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{r=2n} \alpha_r' - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' \right]$$

در نقطه انتهای خط یعنی D مقدار $p = 2n$ است، از این رو ارتفاع نقطه D برابر است با:

$$z_D'' = a = d \left[\frac{1}{2} \sum_{r=n+1}^{r=2n} \alpha_r' - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n} \alpha_r' \right] \quad (۶-a)$$

• ارتفاع نقطه‌ای روی وجه AB

ارتفاع نقاط روی دو وجه موازی AB و CD نسبت به صفحه مرجع $x'y'$ محاسبه می‌شود. اگر z_p ارتفاع نقطه‌ای روی خط BA و z_p' ارتفاع متناظر روی خطی که نقطه B را به انتهای خط عمودی در نقطه A وصل می‌کند باشد (شکل ۶) خواهیم داشت:

$$z_p' - z_p = (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} d_2 \alpha_r' - \sum_{r=0}^{r=p} d_2 \alpha_r'$$

در رابطه فوق d_2 اندازه فاصله عمودی پایه اول نسبت به خط واصل دو پایه دیگر می‌باشد. $2n_2$ تعداد قسمت‌های انتخاب شده در امتداد دو وجه AB یا DC است.

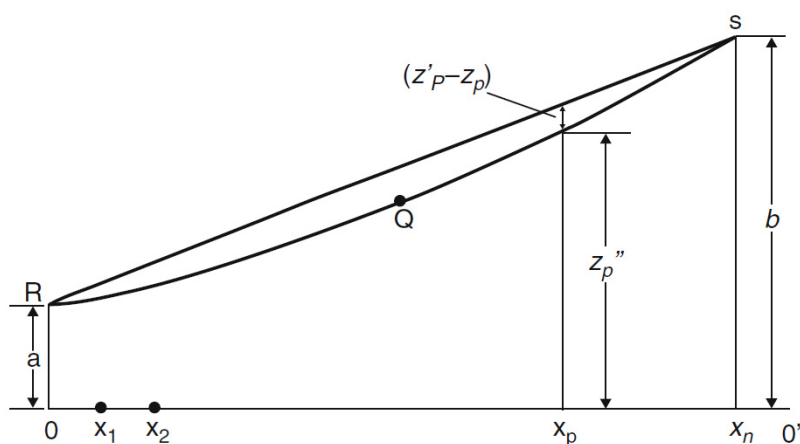
ارتفاع منحنی RQS (شکل ۷) که از اندازه‌گیری نقاط بالای صفحه $x'y'$ بدست می‌آید، برابر اختلاف بین ارتفاع خط RS نسبت به صفحه مرجع و $(z_p' - z_p)$ است.

ارتفاع نقطه D برابر با a است و b ارتفاع نقطه A از صفحه مرجع است. از این رو ارتفاع نقطه p-ام که از رابطه مربوط به D بدست آمده برابر خواهد بود با:

$$z'' = a + (b-a)\left(\frac{p}{2n_2}\right) - (z'_p - z_p) = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \left(\frac{p}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + \left(\frac{p}{2n_2}\right)(b-a) \quad (V-a)$$

اگر p از نقطه A شمارش شده باشد، پس ارتفاع نقطه p-ام به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$z'' = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + (p/2n_2)(a-b) + b \quad (V-b)$$



شکل ۷ ارتفاع نقاط روی خط AB

• ارتفاع نقطه ای روی وجه DC

با تکرار مراحل مربوط به تعیین ارتفاع نقاط روی وجه AB و استفاده از α'_r به جای α_r ارتفاع نقطه p-ام روی وجه DC در صورتی که شروع نقاط از سمت D باشد به صورت زیر خواهد بود:

$$z''' = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha'_r - (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha'_r \right] + (p/2n_2)(b-a) + a \quad (A-a)$$

اگر p از سمت نقطه C شمارش شده باشد در آن صورت ارتفاع نقطه p به صورت زیر خواهد بود:

$$z''' = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha'_r - (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + (p/2n_2)(a - b) + b \quad (8-b)$$

• ارتفاع نقطه ای روی وجه AD

فرض کنید آینه دیگری با فاصله d_3 ، فاصله عمودی پایه جلوی میز تا خط واصل دو پایه دیگر و $2n_3$ تعداد قسمت‌های انتخاب شده در امتداد AD باشد. ارتفاع نقطه D از صفحه مرجع برابر a و ارتفاع نقطه A برابر b است، از این رو ارتفاع نقطه p به که از نقطه D شمارش شده باشد از صفحه xy از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$z''' = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(b - a) + a \quad (9-a)$$

اگر p از سمت نقطه A شمارش شده باشد در آن صورت ارتفاع نقطه p به صورت زیر خواهد بود:

$$z''' = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(a - b) + b \quad (9-b)$$

با توجه به این که ارتفاع از صفحه مرجع برای نقطه A برابر b و برای نقطه D برابر a است، از این رو ارتفاع نسبی که باید اضافه شود عبارتست از:

$$(p/2n_3)(a - b) + b$$

• ارتفاع نقطه ای روی وجه BC

با روشی مشابه ارتفاع نقطه p به که از سمت انتهای B شمارش شده باشد برابر است با:

$$z''' = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha'_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(b - a) + a \quad (10-a)$$

اگر p از سمت نقطه C شمارش شده باشد در آن صورت ارتفاع نقطه p به صورت زیر خواهد بود:

$$z''' = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(a-b) + b \quad (۱۰-b)$$

• ارتفاع نقطه‌ای روی وجه میانی GH

$$z''' = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(f-c) + c \quad (۱۱)$$

مقدار c ارتفاع نقطه G برابر با مجموع ارتفاع‌های h_1 و h_2 است. مقدار h_1 میانگین ارتفاع نقاط A و B است و G نقطه وسط خط AB می‌باشد و h_2 ارتفاع اندازه‌گیری شده نقطه G در امتداد خط AB است. مقادیر h_1 و h_2 به صورت زیر بیان می‌شود:

$$h_1 = \frac{a+b}{2}$$

$$h_2 = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right\}$$

مقدار c برابر است با:

$$c = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (۱۲)$$

مقدار f نیز برابر است با:

$$f = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha'_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (۱۳)$$

• ارتفاع نقطه‌ای روی وجه میانی EF

$$z''' = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + (p/2n_2)(f'-c') + c' \quad (۱۴)$$

مقدار c' ارتفاع نقطه E برابر با مجموع ارتفاع‌های h_1' و h_2' است. مقدار h_1' میانگین ارتفاع نقاط A و D است و E نقطه وسط خط AD می‌باشد و h_2' ارتفاع اندازه‌گیری شده نقطه E در امتداد خط AD است. مقادیر h_1' و h_2' به صورت زیر بیان می‌شود:

$$h_2' = \frac{1}{2} d_3 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha_r - \sum_{n_3+1}^{r=2n_3} \alpha_r \right\} \quad h_1' = \frac{a+b}{2}$$

مقدار c' برابر است با:

$$c' = \frac{1}{2} d_3 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha_r - \sum_{n_3+1}^{r=2n_3} a_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (15)$$

مقدار f' نیز برابر است با:

$$f' = \frac{1}{2} d_3 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha'_r - \sum_{n_3+1}^{r=2n_3} \alpha'_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (16)$$

معادلات (۱۲)، (۱۳)، (۱۵) و (۱۶) برای محاسبه ارتفاع نقاط انتهایی خطوط GH و EF

نسبت به صفحه XY بکار می‌رود.

بعضی از نقاط می‌توانند پایین‌تر از صفحه مرجع XY قرار داشته باشند. اضافه کردن حداکثر ارتفاع نقاط پایین‌تر از صفحه XY به ارتفاع کل نقاط، اختیاری است. با این عمل مقدار ارتفاع کلیه نقاط مثبت بوده و بالاتر از صفحه مرجع قرار می‌گیرند، پس دآوری در مورد مسطح بودن صفحه تحت کالیبراسیون بسیار ساده خواهد بود.

• ارتفاع تعدادی از نقاط مهم

با مراجعه به شکل ۱ و استفاده از پارامترهای بخش قبل، ارتفاع نسبت به صفحه XY برای نقاط

مهم خاص به شرح ذیل خواهد بود:

ارتفاع	نقطه
0	محل تلاقی دو قطر Q
b	نقاط انتهایی قطر AC A & C
a	نقاط انتهایی قطر BD B & D
G نقطه وسط خط AB	$c = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (17)$

$$\begin{array}{l} \text{DC نقطه وسط خط} \\ \text{H} \end{array} \quad f = \frac{1}{2}d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha'_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (18)$$

$$\begin{array}{l} \text{AD نقطه وسط خط} \\ \text{E} \end{array} \quad c' = \frac{1}{2}d_3 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha_r - \sum_{n_3+1}^{r=2n_3} \alpha_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (19)$$

$$\begin{array}{l} \text{BC نقطه وسط خط} \\ \text{F} \end{array} \quad f' = \frac{1}{2}d_3 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha'_r - \sum_{n_3+1}^{r=2n_3} \alpha'_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad (20)$$

نقاط وسط خطوط EF و GH یکسان نبوده و نمی‌توانند در نقطه Q بر هم منطبق باشند. بنابراین این به آسانی می‌توان مشاهده نمود که خطوط GH و EF یکدیگر را قطع نمی‌کنند و همچنین هیچ یک از آن‌ها امکان تلاقی با دو قطر را ندارند.

اگر z_1 ارتفاع نقطه Q، محل تلاقی دو قطر نسبت به صفحه مرجع انتخابی باشد و ارتفاع مرکز خطوط GH و EF به ترتیب z_2 و z_3 باشند پس نقطه میانی تلاقی می‌تواند به صورت $\bar{z} = (2z_1 + z_2 + z_3) / 4$ بیان شود. بنابر این مقدار $(\bar{z} - z_1)(1 - 2s_1 / w)$ تصحیح باید برای نقاط روی قطرهای AQC و BQD اعمال شود. در این جا s_1 فاصله از مرکز Q در امتداد قطر مربوط به گوشه متناظر و w طول قطر است. $\{1 - 2s_2 / (u + v)\}(\bar{z} - z_2)$ مقدار تصحیح مربوط به QGA، QGB و QHD، QHC است که در آن s_2 فاصله بین هر نقطه در امتداد هر یک از خطوط تا نقطه Q و u و v به ترتیب طول وجوه موازی AB یا DC و AD یا BC هستند.

مقدار تصحیح برای QFA، QFD، QEB و QEC نیز مشابه حالت فوق بوده و برابر است با:

$$(\bar{z} - z_3)\{1 - 2s_3 / (u + v)\}$$

که در آن s_3 فاصله نقطه Q تا خطوط مذکور می‌باشد.

مثال عددی

برای قطرهای BD یا AC

رابطه مورد استفاده برای قطرهای به صورت زیر است.

$$z''_p = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right]$$

$$a = d_1 \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha'_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha'_r \right]$$

$$b = d_1 \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right]$$

داده‌ها عبارتند از:

$$d_1 = 55 \text{ mm}, n_1 = 12$$

$$\left(\frac{1}{2}\right) \sum_0^{n_1} d_1 a_r = \frac{11/275}{2} = 5/637, \frac{1}{2} \sum_0^{n_1} d_1 a_r = -9/9$$

$$\sum_0^{n_1} d_1 a_r = -11/55 \quad \sum_0^{n_1} d_1 a_r = 4/675$$

$$b = 0.96 \mu\text{m} \quad a = 1.68 \mu\text{m}$$

جدول ۱ - مشاهدات و محاسبات ارتفاع نقاط روی خطوط BD و AC

S. No	BD					AC				
	I	II	III	IV	V	I	II	III	IV	V
	$\alpha 10^{-4} \text{ rad}$	$d_1 \alpha \quad d_1 = 55$	$d_1 \Sigma \alpha$	$p/n \sum_0^{2n_1} d_1 \alpha_r$	III-IV +0.96	α'	$d_1 \alpha'$	$\Sigma d_1 \alpha'$	$p/n_1 \sum_0^{2n_1} d_1 \alpha'_r$	III-IV +1.65
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.96	0.0	0.0	0.0	0.0	1.65
1	0.0	0.0	0.0	0.940	-0.02	0.0	0.0	0.0	-1.65	3.3
2	0.0	0.0	0.0	1.879	-0.92	-3.0	-1.65	-1.65	-3.3	3.3
3	1.5	0.825	0.825	2.819	-1.03	-5.0	-2.75	-4.4	-4.95	2.2
4	3.0	1.65	2.475	3.758	-0.32	-5.0	-2.75	-7.15	-6.6	1.1
5	2.0	1.1	3.575	4.698	-0.16	-4.0	-2.2	-9.35	-8.25	0.55
6	2.0	1.1	4.675	5.638	0.00	-4.0	-2.2	-11.55	-9.9	0.0
7	2.0	1.1	5.775	6.577	0.16	-2.0	-1.1	-12.65	-11.55	0.55
8	0.5	0.275	6.05	7.517	-0.51	-3.0	-1.65	-14.3	-13.2	0.55
9	1.5	0.825	6.875	8.456	-0.62	-2.0	-1.1	-15.4	-14.85	1.10
10	3.0	1.65	8.525	9.396	0.09	-2.0	-1.1	-16.5	-16.5	1.65
11	2.0	1.1	9.625	10.335	0.25	-1.0	-0.55	-17.05	-18.15	2.75
12	3.0	1.65	11.275	11.275	0.96	-5.0	-2.75	-19.8	-19.8	1.65

توضیحات مربوط به جدول ۱

ستون اول α مربوط به مشاهدات است.

ستون دوم مربوط به مقدار αd است.

ستون سوم $d \sum_{i=0}^{r=p} a_r$ مجموع ستون دوم است.

آخرین آیت $d \sum_{i=0}^{r=\gamma n_1} a_r$ و آیت میانی $d \sum_{i=0}^{r=n_1} a_r$ است و مقدار b و a را مشخص می‌کنند.

ستون چهارم $d \sum_{i=0}^{r=n_1} a_r (p/n_1)$ است.

و ستون پنجم عبارت است از III-IV+d که ارتفاع z نقاط روی قطر AC را مشخص می‌کند.

ستون‌های فوق برای خط BD نیز در جدول تکرار شده است.

برای وجوه موازی بلندتر BA یا CD

رابطه مورد استفاده برای وجوه موازی بزرگتر به صورت زیر است:

$$z_p = d_{\gamma} \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/\gamma n_{\gamma}) \sum_{r=0}^{r=\gamma n_{\gamma}} \alpha_r \right] + (p/\gamma n_{\gamma})(a-b) + b \quad \text{برای } CD$$

داده‌ها عبارتند از:

$$d_{\gamma} = d = 55 \text{ mm}$$

$$n_{\gamma} = 10$$

$$\sum_0^{\gamma n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r = 2/75$$

$$\sum_0^{n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r = 19/25$$

$$B = -\sum_0^{\gamma n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r + b - a$$

$$B = -\sum_0^{n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r + a - b$$

$$= -2/75 - 0/69 = -3/44$$

$$= -19/25 + 0/69 = -18/56$$

$$\sum_0^{n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r = 0/0$$

$$\sum_0^{n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r = 9/35$$

$$\sum_0^{n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r - \frac{1}{\gamma} \sum_0^{\gamma n_{\gamma}} d_{\gamma} a_r + \frac{1}{\gamma} (b+a) = c$$

$$\sum_0^{n_r} d_r a_r - \frac{1}{r} \sum_0^{r n_r} d_r a_r + \frac{1}{r} (b + a) = f$$

$$1/375 - 0/0 + 1/305 = 0/07 = c$$

$$-9/625 + 9/35 + 1/305 = 1/03 = f$$

توضیحات مربوط به جدول ۲

ستون اول α مربوط به مشاهدات است.

ستون دوم مقدار ارتفاع را αd مشخص می‌کند.

ستون سوم مجموع αd است.

آخرین آیت $d_r \sum_{i=0}^{r=2n_r} a_r$ و آیت میانی $d_r \sum_{i=0}^{r=n_r} a_r$ است. اطلاعات مربوط به a و b مقدار B را

که در ستون چهارم و همچنین برای محاسبه مقادیر c و f به کار رفته است، مشخص می‌کند.

ستون چهارم مقدار $(p/2n_2)B$ است.

ستون پنجم مقدار $III-IV+V+a$ را مشخص می‌کند.

ستون‌های فوق در جدول برای خط CD نیز یکسان است. مقادیر B و f از ستون سوم مانند

قبل محاسبه شده‌اند.

جدول ۲ مشاهدات و محاسبات ارتفاع نقاط روی خطوط BA و CD

S No	BA					CD				
	$I\alpha$	$II\alpha d$	$III\Sigma\alpha d$	$IVB.p/n$	V $IV + V + a$	$I\alpha$	$II\alpha d$	$III\Sigma\alpha d$	$IVB.p/n$	V $IV + V + b$
0	0.0	0.0	0.0	0.0	1.65	0.0	0.0	0.0	0.0	0.96
1	0.0	0.0	0.0	-0.344	1.31	0.0	0.0	0.0	-1.856	-0.90
2	-2.0	-1.1	-1.1	-0.688	-0.14	3.0	1.65	1.65	-3.712	-1.10
3	-1.0	-0.55	-1.65	-1.032	-1.03	0.0	0.0	1.65	-5.568	-2.96
4	1.0	0.55	-1.1	-1.376	-0.83	6.0	3.3	4.95	-7.424	-1.51
5	2.0	1.1	0.0	-1.720	-0.07	8.0	4.4	9.35	-9.28	1.03
6	0.0	0.0	0.0	-2.064	-0.41	7.0	3.85	13.20	-11.136	3.02
7	0.0	0.0	0.0	-2.408	-0.76	4.0	2.20	15.40	-12.992	3.37
8	1.0	0.55	0.55	-2.752	-0.55	2.0	1.10	16.50	-14.848	2.61
9	2.0	1.1	1.65	-3.096	-0.26	3.0	1.65	18.15	-16.704	2.41
10	2.0	1.1	2.75	-3.44	0.96	2.0	1.1	19.25	-18.56	1.65

برای وجوه BC یا AD

روابط به کار رفته در محاسبه ارتفاع وجوه موازی کوچک‌تر به صورت زیر است:

$$d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(b-a) + a \quad \text{برای وجه BC}$$

$$d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha'_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha'_r \right] + (p/2n_3)(a-b) + b \quad \text{برای وجه AD}$$

داده‌ها عبارتند از:

$$d_v = 5 \cdot mm \quad n_v = 6$$

$$\sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r = 0 / 5a - b = -0 / 69 \quad \sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r = 7 / 0 \cdot b - a = 1 / 65 - 0 / 96 = 0 / 69$$

$$B = \sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r + a - b = -1 / 19 \quad b = \sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r + b - a = -6 / 31$$

$$\sum_0^{n_v} d \alpha_r = 2 \quad \sum_0^{n_v} d \alpha_r = -1 / 5$$

$$-\frac{1}{v} \sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r + \sum_0^{n_v} d \alpha_r + \frac{1}{v} (b+a) = c \quad -\frac{1}{v} \sum_0^{v n_v} d_v \alpha_r + \sum_0^{n_v} d \alpha_r + \frac{1}{v} (b+a) = f$$

$$c = -3 / 5 + 2 / 0 + 1 / 30.5 = -0 / 195 \quad f = -0 / 25 + (-1 / 5) + 1 / 30.5 = -0 / 445$$

برای BC و AD نیز پنج مرحله فوق تکرار می‌شود. در ستون سوم جدول ۳ هر مورد مقادیر مربوط به B، $c^{\sim}$ و $f^{\sim}$ را مشخص می‌کند.

برای وجوه موازی میانی EF و GH

داده‌ها عبارتند از:

$$z_p = d_v \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p / v n_v) \sum_{r=0}^{r=v n_v} \alpha_r \right] + (p / v n_v)(f-c) + c \quad \text{برای GH}$$

$$z_p = d_r \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p / r n_r) \sum_{r=0}^{r=r n_r} \alpha_r \right] + (p / r n_r)(f' - c') + c' \quad \text{برای EF}$$

داده‌ها عبارتند از:

برای GH: $n_3=6$ و $d_3=55 \text{ mm}$ و برای EF: $n_2=10$ و $D=55 \text{ mm}$

جدول ۳- مشاهدات و محاسبات ارتفاع نقاط روی خطوط BC و AD

SN	AD					BC				
	α	αd	$\Sigma \alpha d$	B.p/n	IV + V + b	α	αd	$\Sigma \alpha d$	B.p/n	IV + V + a
0	0.0	0.0	0.0	0.0	0.96	0.0	0.0	0.0	0.0	1.65
1	0.0	0.0	0.0	-1.05	-0.09	0.0	0.0	0.0	-0.198	1.45
2	1.0	0.5	0.5	-2.10	-0.64	-5.0	-2.5	-2.5	-0.397	-1.25
3	3.0	1.5	2.0	-3.15	-0.19	2.0	1.0	-1.5	-0.595	-0.44
4	5.0	2.5	4.5	-4.21	-1.25	-2.0	-1.0	-2.5	-0.793	-1.64
5	4.0	2.0	6.5	-5.26	2.20	1.0	0.5	-2.0	-0.992	-1.34
6	1.0	0.5	7.0	-6.31	1.65	5.0	2.5	0.5	-1.19	0.96

$$B = \sum_0^{r n} d \alpha_r + f - c \quad \sum_0^{r n} d \alpha_r + c - f = +7/1 + (-0/19 + 0/445) = 7/35$$

$$= -5/5 + 1/0.3 + 0/0.7 = -4/4$$

برای خطوط EF و GH نیز مراحل فوق (جدول ۴) تکرار می‌شود.

جدول ۴- مشاهدات و محاسبات ارتفاع نقاط روی خطوط EF و GH

S.N	EF					GH				
	α	αd	$\Sigma \alpha d$	B.p/n	IV + V + c	α	αd	$\Sigma \alpha d$	B.p/n	IV + V + a
0	0.0	0.0	0.0	0.0	-0.44	0.0	0.0	0.0	0.0	0.07
1	0.0	0.0	0.0	0.734	-0.30	0.0	0.0	0.0	-0.733	-0.8
2	-1.0	-0.55	-0.55	1.48	+0.49	2.0	1.0	1.0	-1.467	-0.54
3	-3.0	-1.65	-2.2	2.22	-0.42	1.0	0.5	1.5	-2.20	-0.77
4	-1.0	-0.55	-2.75	2.96	-0.23	3.0	1.5	3.0	-2.933	0.00
5	-2.0	-1.1	-3.85	3.70	-0.59	3.0	1.5	4.5	-3.667	0.76
6	-0.0	0.0	-3.85	4.44	+0.15	2.0	1.0	5.5	-4.4	1.03
7	-1.0	-0.55	-4.40	5.18	+0.34					
8	-2.0	-1.1	-5.5	5.92	-0.02					
9	-2.0	-1.1	-6.60	6.66	-0.38					
10	-1.0	-0.55	-7.1	7.4	-0.19					

مطابقت یک صفحه با اطلاعات داده شده

معادله کلی برای یک صفحه به صورت زیر است.

$$ax + by + cz = d \quad (21)$$

در حالت خاص کالیبراسیون یک صفحه z مسطح اندازه‌گیری انجام می‌شود و بنابر این رابطه (۲۱) به صورت زیر خواهد بود:

$$z = ax + by + d \quad (22)$$

که در آن مقادیر جدید a ، b و d برابر مقادیر قدیمی آن‌ها تقسیم بر c هستند. از آن جایی که z تنها کمیت اندازه‌گیری شده است و سایر مختصات از ابعاد هندسی صفحه میانی xy محاسبه می‌شوند، انحراف هر نقطه از صفحه میانی بستگی به اختلاف مختصات z آن نقطه دارد. اگر z'_p مختصات محور z چنین نقطه‌ای باشد و z_p مختصات آن نقطه روی صفحه باشد $z'_p - z_p$ به صورت زیر خواهد بود.

$$z'_p - z_p = z'_p - ax_p - by_p - d$$

حال اگر هر یک از این انحرافات از صفحه میانی یک انحراف تصادفی باشد و اگر تمام این نقاط تصادفی به همان جامعه تصادفی تعلق داشته باشند پس احتمال هر یک از انحرافات‌هایی که با یکدیگر رخ می‌دهند برابر است با حاصل ضرب احتمال وقوع هر یک از نقاط به صورت منفرد که با استفاده از توزیع احتمال گاوس به دست می‌آید. احتمال مرکب با استفاده از رابطه زیر تعیین

می‌شود:

$$P = \frac{1}{\sigma^n (2n)^{n/2}} \prod_{p=1}^{p=n} \exp(z'_p - z_p)^2 / 2\sigma^2 \quad P = \frac{1}{\sigma^n (2n)^{n/2}} \exp \left\{ -\sum_{p=1}^{p=n} \frac{(z'_p - z_p)^2}{2\sigma^2} \right\} \quad (23)$$

مقدار معادله ۲۳ بیشینه خواهد بود در صورتی که توان منفی کمینه باشد. بنابر این برای بیشینه احتمال باید مقدار E که از معادله ۲۴ محاسبه می‌شود کمینه باشد.

$$E = \sum_{p=1}^{p=n} (z'_p - z_p)^2 \quad (24)$$

برای کمینه کردن E، مشتقات جزئی آن با توجه به متغیرهای a، b و d باید صفر باشند. بنابراین شرایط کمینه بودن مقدار E به صورت زیر است:

$$\frac{\partial E}{\partial a} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E}{\partial b} = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial E}{\partial d} = 0 \quad (25)$$

اعمال شرایطی که P بیشینه شود به نوبه خود این الزام را بیان می‌کند که مجموع مربعات انحراف‌های داده شده باید کمینه شود. این شرایط به "اصل حداقل مربعات" شناخته می‌شود. با در نظر گرفتن شرایط (۲۵) خواهیم داشت.

$$\begin{aligned} \frac{\partial E}{\partial a} &= -\sum_{p=1}^{p=n} x_p (z'_p - ax_p - by_p - d) = 0 \\ \frac{\partial E}{\partial b} &= -\sum_{p=1}^{p=n} y_p (z'_p - ax_p - by_p - d) = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

$$\frac{\partial E}{\partial d} = \sum_{p=1}^{p=n} (z'_p - ax_p - by_p - d) = 0$$

با بازنویسی روابط (۲۶) خواهیم داشت.

$$\sum_{p=1}^{p=n} x_p z'_p = a \sum_{p=1}^{p=n} x_p^2 + b \sum_{p=1}^{p=n} x_p y_p + d \sum_{p=1}^{p=n} x_p \quad (27)$$

$$\sum_{p=1}^{p=n} y_p z'_p = a \sum_{p=1}^{p=n} y_p x_p + b \sum_{p=1}^{p=n} y_p^2 + d \sum_{p=1}^{p=n} y_p \quad (28)$$

$$\sum_{p=1}^{p=n} z'_p = a \sum_{p=1}^{p=n} x_p + b \sum_{p=1}^{p=n} y_p + nd \quad (29)$$

معادلات فوق معادلات نرمال نامیده می‌شوند. سه معادله و سه مجهول a ، b و d وجود دارد که هر یک از آن‌ها با محاسبات ساده به دست خواهند آمد.

برای حذف d از معادله (۲۷) و (۲۹) باید رابطه (۲۷) را بر n و رابطه (۲۹) را بر $\sum_{p=1}^{p=n} x_p$ تقسیم و از یکدیگر کم می‌کنیم.

$$a \left\{ n \sum_{p=1}^{p=n} x_p^2 - \left(\sum_{p=1}^{p=n} x_p \right)^2 \right\} + b \left\{ n \sum_{p=1}^{p=n} x_p y_p - \sum_{p=1}^{p=n} x_p \sum_{p=1}^{p=n} y_p \right\} = n \sum_{p=1}^{p=n} x_p z'_p - \sum_{p=1}^{p=n} x_p \sum_{p=1}^{p=n} z'_p \quad (30)$$

همانند فوق برای حذف d از معادله (۲۸) و (۲۹) باید رابطه (۲۸) را بر n و رابطه (۲۹) را بر

$\sum_{p=1}^{p=n} y_p$ تقسیم و از یکدیگر کم می‌کنیم.

$$a \left\{ n \sum_{p=1}^{p=n} x_p y_p - \sum_{p=1}^{p=n} x_p \sum_{p=1}^{p=n} y_p \right\} + b \left\{ \sum_{p=1}^{p=n} y_p^2 - \left(\sum_{p=1}^{p=n} y_p \right)^2 \right\} = n \sum_{p=1}^{p=n} y_p z'_p - \sum_{p=1}^{p=n} y_p \sum_{p=1}^{p=n} z'_p \quad (31)$$

با تقسیم طرفین معادله (۳۰) بر n^2 مشاهده خواهیم نمود که ضریب a در معادله (۳۰) به صورت زیر خواهد شد.

$$\frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p^2}{n} - \frac{\left(\sum_{p=1}^{p=n} x_p \right)^2}{n} \quad (32)$$

رابطه بدست آمده بیانگر واریانس x است و آن را V_{xx} می‌نامیم.

با روشی مشابه، ضریب b از رابطه (۳۰) به صورت زیر بدست خواهد آمد:

$$\frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p y_p}{n} - \frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p \sum_{p=1}^{p=n} y_p}{n^2} \quad (33)$$

ضریب فوق کوواریانس بین x و y است و آن را V_{xy} می‌نامیم.

با پیروی از اصول فوق می‌توان روابط (۳۰) و (۳۱) را به صورت زیر نوشت:

$$V_{xx}a + V_{xy}b = V_{xz} \quad (34)$$

$$V_{xy}a + V_{yy}b = V_{yz} \quad (35)$$

با حل معادلات (۳۴) و (۳۵) مقادیر a و b به صورت زیر بدست خواهند آمد:

$$a = \frac{V_{xz'}V_{yy} - V_{yz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \quad (36)$$

$$b = \frac{V_{xx}V_{yz'} - V_{xz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \quad (37)$$

با قرار دادن مقادیر a و b در معادله (۳۱) مقدار d به صورت زیر مشخص خواهد شد.

$$d = \frac{\sum_{p=1}^{p=n} z'_p}{n} - \frac{V_{xz'}V_{yy} - V_{yz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \times \frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p}{n} - \frac{V_{yz'}V_{xx} - V_{xy}V_{xz'}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{p=n} y_p}{n} \quad (38)$$

بنابراین معادله مربوط به صفحه میانی عبارت است از:

$$z = \frac{V_{xz'}V_{yy} - V_{yz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \cdot x + \frac{V_{xz'}V_{yy} - V_{yz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \cdot y + \frac{\sum_{p=1}^{p=n} z'_p}{n} - \frac{V_{xz'}V_{yy} - V_{yz'}V_{xy}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p}{n} - \frac{V_{yz'}V_{xx} - V_{xy}V_{xz'}}{V_{xx}V_{yy} - V_{xy}^2} \cdot \frac{\sum_{p=1}^{p=n} y_p}{n} \quad (39)$$

مختصات مرکز کلیه نقاط به صورت زیر است:

$$\frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p}{n}, \frac{\sum_{p=1}^{p=n} y_p}{n}, \frac{\sum_{p=1}^{p=n} z'_p}{n} \quad (40)$$

اگر مختصات مرکز در رابطه (۳۹) جایگزین شود، به وضوح قابل مشاهده است که معادله برابر صفر خواهد شد. از این رو، صفحه‌ای که با معادله (۳۹) مشخص شده است از مرکز می‌گذرد. با انتقال مرکز به نقطه‌ای دیگر، معادله‌ی همان صفحه به دست می‌آید که به دلیل عدم وجود مقدار ثابت، ساده‌تر از قبل است، سایر ضرایب x و y به همان صورت قبل باقی خواهند ماند. معمولاً انحراف کلی از صفحه میانی با مقادیری که قبلاً به دست آمد اختلاف زیادی ندارد. روش صفحه میانی در صورتی مفید است که انحراف معیار عدم مسطح بودن صفحه از صفحه میانی مد نظر باشد.

انحراف معیار از صفحه میانی

معادله صفحه میانی را که مرکز آن به عنوان مبدأ در نظر گرفته می‌شود می‌توان به صورت زیر

نوشت.

$$AX + BY - Z = 0$$

(۴۱)

اگر:

$$X_p = x_p - \frac{\sum_{p=1}^{p=n} x_p}{n}, Y_p = y_p - \frac{\sum_{p=1}^{p=n} y_p}{n}, Z_p = \frac{\sum_{p=1}^{p=n} z_p}{n} \quad (42)$$

فاصله هر نقطه با مختصات (X_p, Y_p, Z_p) از صفحه با معادله زیر مشخص می‌شود.

$$\frac{AX_p + BY_p - Z_p}{(A^2 + B^2 + 1)^{1/2}} \quad (43)$$

بنابر این انحراف معیار به صورت زیر خواهد شد:

$$s = \left\{ \sum_{p=0}^{p=n} \frac{(AX_p + BY_p - Z_p)^2}{(n-2)(A^2 + B^2 + 1)} \right\}^{1/2} \quad (44)$$

$n-2$ مخرج مانند دو پارامتر A و B از تعداد n نقطه با در نظر داشتن $n-2$ درجه آزادی قابل

محاسبه است.

عدم قطعیت اندازه‌گیری

• عدم قطعیت در اندازه‌گیری ارتفاع یک نقطه

ابزار مورد استفاده برای اندازه‌گیری انحراف زاویه‌ای α همانند قبل است. بنابراین عدم قطعیت

استاندارد نوع A نیز برای هر α با مقادیر قبل یکسان است و آن را σ_α می‌نامیم.

• عدم قطعیت ارتفاع نقاط روی قطرهای AC یا BD

نمادهای مورد استفاده عبارتند از:

d_1 فاصله بین نقاط روی AC یا BD

d_2 فاصله بین نقاط روی AB ، CD یا EF

d_3 فاصله بین نقاط روی AB ، GH یا AD

$2n_1$ تعداد مشاهدات برداشت شده از AC یا BD

$2n_2$ تعداد مشاهدات برداشت شده از AB یا EF یا CD

$2n_3$ تعداد مشاهدات برداشت شده از AD، BC و GH ارتفاع نقطه p -م روی قطرهای AC یا BD نسبت به صفحه مرجع که با خطوط RQS و $S'Q'R'$ از معادله (۴) بدست می‌آید.

$$z_{CA \rightarrow BD} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=0}^{r=2n_1} a_r + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} a_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} a_r \right] \quad (۴۵)$$

با در نظر گرفتن $\sum_{r=0}^{r=2n_1} a_r$ در عبارت دوم به عنوان مجموع $\sum_{r=p+1}^{r=2n_1} a_r$ و $\sum_{r=0}^{r=p} a_r$ و در عبارت سوم به عنوان مجموع $\sum_{r=0}^{r=n_1} a_r$ و $\sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} a_r$ معادله (۴۵) به صورت زیر خواهد شد:

$$z_{CA \rightarrow BD} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=p+1}^{r=2n_1} a_r + \frac{1}{2} \sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} a_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_1} a_r \right] \quad (۴۶)$$

$$z_{CA \rightarrow BD} = d_1 \left[\left(1 - \frac{p}{2n_1}\right) \sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=p+1}^{r=2n_1} a_r + \frac{1}{2} \sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} a_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_1} a_r \right]$$

می‌دانیم که اگر Z ترکیب خطی از تعدادی متغیر گوسی باشد به عنوان مثال:

$$Z = a_1 x_1 + a_2 x_2 + a_3 x_3 + \dots + a_n x_n \quad (۴۷)$$

بنابراین واریانس σ_z^2 متغیر Z از معادله زیر بدست خواهد آمد.

$$V_z = a_1^2 \sigma_{x1}^2 + a_2^2 \sigma_{x2}^2 + a_3^2 \sigma_{x3}^2 + \dots + a_n^2 \sigma_{xn}^2 \quad (۴۸)$$

اندازه‌گیری تمام a_r ها شامل عدم قطعیت بوده و بنابراین می‌تواند به عنوان متغیرهای تصادفی در نظر گرفته شود. علاوه بر این هر a_r که با استفاده از همان ابزار بدست آید، دارای انحراف معیار مشابه خواهد بود که آن را σ_a در نظر می‌گیریم.

با پیروی از اصل بیان شده در رابطه (۴۸)، معادله (۴۶) به صورت زیر خواهد شد:

$$s_{CA \rightarrow BD}^2 = \left[p - \frac{p^2}{n_1} + \frac{p^3}{4n_1^2} + \frac{p^2}{4n_1^2} (2n_1 - p) + \frac{1}{4} n_1 + n_1 \right] d_1^2 \sigma_{xa}^2 \quad (۴۹) \quad \text{یا}$$

$$s_{CA \rightarrow BD}^2 = \left[p - \frac{p^2}{n_1} + \frac{n_1}{2} \right] d_1^2 \sigma_{xa}^2$$

عدم قطعیت ارتفاع نقاط روی قطرهای AC یا BD

ارتفاع نقطه p روی BA اگر p از سمت B شمارش شده باشد به صورت زیر است:

$$z_{AB \rightarrow DC} = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_2} \sum_{r=0}^{r=2n_2} a_r \right] + \frac{p}{2n_2} (b-a) + a$$

پس با بیان $\sum_{r=0}^{r=2n_1} a_r$ به عنوان مجموع دو جمع، یکی از 1 تا p و دیگری از $p+1$ تا $2n_1$ و ساده

کردن سایر عبارات، ارتفاع $z_{AB \text{ or } DC}$ نقطه p روی خط AB یا DC به صورت زیر خواهد بود.

$$z_{AB \rightarrow DC} = d_2 \left[\left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=p} a_r - \frac{p}{2n_2} \sum_{r=p+1}^{r=2n_2} a_r \right] + \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) a + b \frac{p}{2n_2} \quad (50)$$

مقادیر a و b با استفاده از روابط (5-a) و (6-a) به صورت زیر می‌باشند.

$$a = d_1 \left[\frac{1}{2} \sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad b = d_1 \left[\frac{1}{2} \sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha'_r \right]$$

با استفاده از رابطه (۴۸) واریانس a و b به صورت زیر است:

$$\sigma_a^2 = d_1^2 \left[\left(\frac{1}{4} (n_1 + \frac{1}{4} n_1) \right) \right] \sigma_\alpha^2 = d_1^2 \sigma_\alpha^2 n_1 / 2 \quad (51)$$

$$\sigma_b^2 = d_1^2 \left[\left(\frac{1}{4} (n_1 + \frac{1}{4} n_1) \right) \right] \sigma_\alpha^2 = d_1^2 \sigma_\alpha^2 n_1 / 2 \quad (52)$$

با استفاده از اصل به کار رفته در رابطه (۴۸) و جای‌گذاری واریانس‌های a و b در معادله (۵۰)

واریانس $\sigma_{BA,DC}^2$ به صورت زیر حاصل خواهد شد.

$$\sigma_z^2 = \left[\left\{ \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right)^2 p + \frac{p^2}{4n_2^2} (2n_2 - p) \right\} d_2^2 + \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right)^2 d_1^2 n_1 / 2 + \frac{p^2}{4n_2^2} (d_1^2 n_1 / 2) \right] \sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_{BA, DC}^2 = \left[\left(p - \frac{p^2}{n_2} + \frac{p^3}{4n_2^2} + \frac{p^2}{2n_2} - \frac{p^3}{4n_2^2} \right) d_2^2 + \left(1 - \frac{p}{n_2} + \frac{p^2}{4n_2^2} + \frac{p^2}{4n_2^2} \right) d_1^2 n_1 / 2 + \right] \sigma_\alpha^2$$

$$\sigma_{BA, DC}^2 = \left[p \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) d_2^2 + \left(1 - \frac{p}{n_2} + \frac{p^2}{2n_2^2}\right) d_1^2 n_1 / 2 \right] \sigma_\alpha^2 \quad (53)$$

عبارات معادله (۵۳) برای تعیین عدم قطعیت ارتفاع نقطه p -ام روی DC نیز اعتبار دارد؛ p از انتهای D شمارش می‌شود.

عدم قطعیت ارتفاع نقاط روی قطرهای AD یا CB

عدم قطعیت نقطه p -ام روی AD یا CB اگر p از سمت انتهای A برای نقاط روی خط AD یا از سمت انتهای C برای نقاط روی خط CB با جای‌گذاری d_2 و n_2 به ترتیب به جای d_3 و n_3 در رابطه (۵۳) به‌دست می‌آید. عبارات مربوط به تعیین عدم قطعیت نقطه p -ام روی خطوط AD یا CB در رابطه (۵۴) ارائه شده است.

$$\sigma_{AD, CB}^2 = \left[p \left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) d_3^2 + \left(1 - \frac{p}{n_3} + \frac{p^2}{2n_3^2} \right) d_1^2 n_1 / 2 \right] \sigma_a^2 \quad (54)$$

عدم قطعیت ارتفاع نقطه‌ای روی خط GH

معادله مربوط به تعیین ارتفاع نقطه p -ام روی خط GH بر اساس رابطه (۱۱) به صورت زیر است:

$$z_{GH} = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(f - c) + c$$

رابطه فوق را همانگونه که تشریح شد، می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$z_{GH} = d_3 \left[\left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r + \frac{p}{2n_3} \sum_{p+1}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + c \left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) + \frac{p}{2n_3} f. \quad (55)$$

$$c = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \sum_{n_2+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad \text{از رابطه (۱۲) مقدار } c \text{ برابر است با:}$$

$$f = \frac{1}{2} d_2 \left\{ \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \sum_0^{r=2n_2} \alpha'_r \right\} + \frac{a+b}{2} \quad \text{و مقدار } f \text{ از رابطه (۱۳) برابر است با:}$$

$$\sigma_c^2 = \frac{1}{4} (n_1 + n_2) \sigma_a^2 + \frac{1}{4} (\sigma_a^2 + \sigma_b^2) \quad \text{واریانس } c \text{ برابر است با:}$$

باجای‌گذاری مقادیر σ_a^2 و σ_b^2 از روابط (۵۱) و (۵۲) خواهیم داشت.

$$\sigma_c^2 = \left(\frac{1}{2}d_2^2n_2 + \frac{1}{4}n_1d_1^2\right)\sigma_a^2 \quad (56)$$

واریانس f نیز برابر است با:

$$\sigma_f^2 = \frac{1}{2}(d_2^2n_2 + \frac{1}{2}d_1^2n_1)\sigma_a^2 \quad (57)$$

با به کارگیری اصل واریانس‌های بیان شده در رابطه (۴۸) خواهیم داشت.

$$\sigma_{GH}^2 = p \left(1 - \frac{p}{2n_3}\right) d_3^2 \sigma_a^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{p}{n_3} + \frac{p^2}{2n_3^2}\right) (2n_2d_2^2 + n_1d_1^2) \sigma_a^2 \quad (58)$$

عدم قطعیت ارتفاع نقطه‌ای روی خط EF

عدم قطعیت ارتفاع نقطه‌ای روی خط EF با جای‌گذاری d_2 و n_2 به ترتیب به جای d_3 و n_3 به‌دست می‌آید. معادله مربوط به واریانس ارتفاع نقطه p-ام روی خط EF به صورت زیر است.

$$\sigma_{EF}^2 = p \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) d_2^2 \sigma_a^2 + \frac{1}{4} \left(1 - \frac{p}{n_2} + \frac{p^2}{2n_2^2}\right) (2n_3d_3^2 + n_1d_1^2) \sigma_a^2 \quad (59)$$

عدم قطعیت اختلاف ارتفاع دو نقطه روی قطر

بر اساس موقعیت دو نقطه، دو احتمال وجود دارد: یکی آن که هر دو نقطه روی یک خط قرار دارند و دیگر آن که دو نقطه روی خطوط مختلف واقع شوند.

نقطه‌ها روی یک خط مستقیم قرار دارند

• نقطه‌ها روی قطرهای AC یا BD قرار دارند

تعداد نقاط برداشت شده از هر قطر برابر با $2n_1$ است. ارتفاع نقطه p-ام روی قطر AC نسبت به صفحه مرجع به صورت زیر است.

$$z_{ACp} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_1} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad (60)$$

به همان صورت ارتفاع هر نقطه q -ام دیگر با استفاده از رابطه زیر بیان می‌شود.

$$z_{ACp} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r - \frac{q}{2n_1} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad (61)$$

اگر $q \leq p$ پس مجموع مقادیر از $r=0$ تا $r=2n_1$ را می‌توان به سه قسمت تقسیم کرد.

(الف) از $r=0$ تا $r=q$ ؛

(ب) از $r=q+1$ تا $r=p$ ؛

(ت) از $r=p+1$ تا $r=2n_1$.

بنابراین روابط (۶۰) و (۶۱) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$z_{ACp} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r - \left(\frac{1}{2} - \frac{p}{2n_1} \right) \left\{ \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r + \sum_{r=p+1}^{r=2n_1} \alpha_r \right\} - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad (62)$$

$$z_{ACq} = d_1 \left[\sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r - \left(\frac{1}{2} - \frac{q}{2n_1} \right) \left\{ \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r + \sum_{r=p+1}^{r=2n_1} \alpha_r \right\} - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad (63)$$

با تفریق رابطه (۶۳) از (۶۲) مقدار Δ_{AC} مشخص خواهد شد :

$$\Delta_{AC} = d_1 \left[\left(\frac{q}{2n_1} - \frac{p}{2n_1} \right) \left\{ \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \sum_{r=p+1}^{r=2n_1} \alpha_r \right\} + \left(1 + \frac{q-p}{2n_1} \right) \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r \right] \quad (64)$$

همچنین هر α_r دارای عدم قطعیتی است و بنابر این می‌تواند به عنوان متغیر تصادفی مد نظر قرار گیرد. علاوه بر این هر α_r با استفاده از همان ابزار تعیین شده است. از این رو، انحراف معیار هر α_r برابر خواهد بود و آن را σ_a در نظر می‌گیریم.

حال Δ_{AC} تابع خطی از α_r است بنابراین واریانس σ_{AC}^2 مطابق رابطه (۴۸) برابر است با:

$$\sigma_{AC}^2 = \left\{ \frac{(q-p)^2}{4n_1^2} (q+2n_1-p) + \left(1 + \frac{(q-p)}{2n_1} \right)^2 (p-q) \right\} d_1^2 \sigma_a^2 \quad (65)$$

$$\sigma_{AC}^2 = \left\{ 1 + \frac{q-p}{2n_1} \right\} (p-q) \sigma_a^2 d_1^2 \quad (66)$$

مشاهده شد که واریانس و بنابر این عدم قطعیت استاندارد علاوه بر این که ثابت نیستند به صورت خطی نیز با $p-q$ ارتباط دارند. عدم قطعیت برای $p=2n$ ، $p=q$ و q برابر صفر است.

علاوه بر آن عدم قطعیت برای $p-q=n_1$ بیشینه بوده و به صورت زیر است:

$$\text{عدم قطعیت استاندارد بیشینه} = \left(\sqrt{n_1/2}\right) \sigma_{\alpha} d_1 \quad (67)$$

این عبارت برای قطر BD نیز صادق است.

• نقاط روی وجه موازی BA قرار دارند

تعداد بخش‌های در نظر گرفته شده روی وجه BA برابر با $2n_2$ است. ارتفاع نقطه p -م روی BA نسبت به صفحه داده شده طبق رابطه (۷-a) به صورت زیر خواهد بود:

$$z_{BAp} = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + (p/2n_2)(b-a) + a$$

با در نظر داشتن $\sum_{r=0}^{2n_2} \alpha_r = \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r + \sum_{r=p+1}^{2n_2} \alpha_r$ خواهیم داشت:

$$z_{BAp} = \left[\left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_2} \sum_{r=p+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right] d_2 + a \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) + b \frac{p}{2n_2} \quad (68-a)$$

ارتفاع نقطه q -م نیز روی BA نسبت به مرجع برابر است با:

$$z_{BAq} = \left[\left(1 - \frac{q}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{q}{2n_2} \sum_{r=p+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right] d_2 + a \left(1 - \frac{q}{2n_2}\right) + b \frac{q}{2n_2} \quad (68-b)$$

با در نظر گرفتن این که $p \geq q$ و q مقدار مثبتی است، اختلاف ارتفاع بین دو نقطه با تفریق

رابطه (۶۸-b) از رابطه (۶۸-a) به دست می‌آید و برابر است با:

$$\Delta_{BA} = \left[\frac{q}{2n_2} \sum_{r=q+1}^{r=2n_2} \alpha_r - \frac{p}{2n_2} \sum_{r=p+1}^{r=2n_2} \alpha_r + \left(1 - \frac{p}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \left(1 - \frac{q}{2n_2}\right) \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r \right] d_2 + \frac{p-q}{2n_2} (b-a) \quad (69)$$

که در آن a و b عبارتند از:

$$a = d_1 \frac{1}{2} \left[\sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r \right] \quad (70)$$

$$b = d_1 \frac{1}{2} \left[\sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha'_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha'_r \right] \quad (71)$$

با جای‌گذاری مقادیر a و b در رابطه (۶۹) و جمع کردن عبارت‌های همانم خواهیم داشت:

$$\Delta_{BA} = \left[\left(\frac{q-p}{2n_2} \right) \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r + \left(1 - \frac{p-q}{2n_2} \right) \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r + \left(\frac{q-p}{2n_2} \right) \sum_{r=p+1}^{r=2n_2} \alpha_r \right] d_2 \quad (72)$$

$$+ \left(\frac{q-p}{2n_2} \right) \frac{d_1}{2} \left[\sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha'_r - \sum_{r=n_1+1}^{r=2n_1} \alpha_r + \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{r=n_1} \alpha'_r \right]$$

Δ_{BA} نیز تابع خطی است از α_R بنابراین واریانس $(\sigma_{BA})^2$ با استفاده از رابطه (۴۸) به صورت زیر خواهد شد.

$$\sigma_{BA}^2 = \left[\frac{(p-q)^2}{4n_2^2} (2n_2 - p + q) + \left(1 - \frac{p-q}{2n_2} \right)^2 (p-q) \right] \sigma_\alpha^2 d_2^2 + \frac{(p-q)^2}{4n_1^2} \frac{d_1^2}{4} (4n_1) \sigma_\alpha^2 \quad (73)$$

رابطه (۷۳) پس از ساده کردن به صورت زیر خواهد شد.

$$\sigma_{BA}^2 = \left[(p-q) \left(1 - \frac{p-q}{2n_2} \right) d_2^2 + \frac{(p-q)^2 n_1 d_1^2}{4n_2^2} \right] \quad (74)$$

باید در نظر داشت که عبارت اول همانند عبارت اول رابطه برای قطرهای است و عبارت دوم نشان دهنده سهم ارتفاع دو انتهای قطرهای BD و AC در عدم قطعیت بوده که ناشی از عدم قطعیت a و b است.

در این حالت با قرار دادن $p-q=h$ و مشتق‌گیری از رابطه (۷۴) نسبت به h و برابر با صفر گرفتن ضریب خواهیم دید که عدم قطعیت در h بیشینه بوده و برابر است با:

$$h = \frac{2n_2}{(2 - n_1 d_1^2 / n_2 d_2^2)} \quad (75)$$

بیشینه مقدار عدم قطعیت استاندارد σ_{BA} طبق رابطه زیر بیان می‌شود:

$$\sigma_{BA} = \frac{\sqrt{(2n_2)d\sigma_a}}{\sqrt{\{2(2 - n_1d_1^2/n_2d_2^2)\}}} \quad (76)$$

نقاط روی وجه موازی CD قرار دارند

معادلات (۷۴)، (۷۵) و (۷۶) برای نقاط روی CD در صورتی که p و q از انتهای C شمارش شوند کاملاً صادق است.

• نقاط روی وجوه موازی BC یا AD قرار دارند

معادلات مشابه (۷۴)، (۷۵) و (۷۶) برای زوج نقاط روی وجوه BC یا AD مطابقت داشته فقط باید $2n_3$ جایگزین $2n_2$ شود. تعداد مشاهدات انجام شده روی وجوه BC یا AD است.

• نقاط روی وجه مرکزی GH

ارتفاع نقطه p-ام روی خط GH نسبت به صفحه مرجع طبق رابطه زیر مشخص می‌شود:

$$z_{GHp} = \left[\left(1 - \frac{p}{2n_3}\right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_3} \sum_{r=p+1}^{2n_3} \alpha_r \right] d_3 + c \left(1 - \frac{p}{2n_3}\right) + \frac{fp}{2n_3} \quad (77)$$

ارتفاع نقطه q-ام روی خط GH نسبت به صفحه مرجع طبق رابطه زیر مشخص می‌شود.

$$z_{GHq} = \left[\left(1 - \frac{q}{2n_3}\right) \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r - \frac{q}{2n_3} \sum_{r=q+1}^{2n_3} \alpha_r \right] d_3 + c \left(1 - \frac{q}{2n_3}\right) + \frac{qf}{2n_3} \quad (78)$$

در این حالت $2n_3 \geq p \geq q \geq 0$ است.

اختلاف ارتفاع Δ_{GH} بین این دو نقطه با تفریق رابطه (۷۸) از (۷۷) به صورت زیر بدست می‌آید.

$$\Delta_{GH} = \left[\left(\frac{q-p}{2n_3} \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r \right) + \left(1 - \frac{p-q}{2n_3} \right) \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r - \left(\frac{p-q}{2n_3} \right) \sum_{r=p+1}^{r=2n_3} \alpha_r \right] d_3 + \left(\frac{p-q}{2n_3} \right) (f-c) \quad (79)$$

در این رابطه c ارتفاع نقطه میانی BA نسبت به صفحه مرجع بوده و به صورت زیر است:

$$c = \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n_2} \alpha_r - \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2 + \frac{a+b}{2} \quad (۸۰)$$

با قرار دادن $p=n_2$ در رابطه (۶۸) و جای‌گذاری مقادیر a و b از روابط (۷۰) و (۷۱) مقدار c به صورت زیر خواهد بود:

$$c = \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \frac{1}{2} \sum_{n_2+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2 + \frac{1}{4} \left[\sum_{n_1+1}^{r=2n_1} \alpha_r - \sum_{r=0}^{n_1} \alpha_r \right] d_1 + \frac{1}{4} \left[\sum_{n_1+1}^{r=2n_1} \alpha'_r - \sum_{r=0}^{n_1} \alpha'_r \right] d_1 \quad (۸۱)$$

و مقدار f که ارتفاع نقطه میانی خط CD نسبت به صفحه مرجع است، به صورت زیر بیان می‌شود:

$$f = \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha'_r \right] d_2 + \frac{a+b}{2} \quad (۸۲)$$

از روابط (۸۱) و (۸۲) داریم:

$$f - c = \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2 \quad (۸۳)$$

با جای‌گذاری مقدار $f-c$ از رابطه (۸۳) در رابطه (۷۹) خواهیم داشت:

$$\Delta_{GH} = \left[\left(\frac{q-p}{2n_3} \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r \right) + \left(1 - \frac{p-q}{2n_3} \right) \sum_{r=q+1}^{r=p} \alpha_r - \left(\frac{p-q}{2n_3} \right) \sum_{r=p+1}^{r=2n_3} \alpha_r \right] d_3 + \frac{(p-q)}{2n_3} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2$$

با به کارگیری رابطه (۴۸) مانند قبل واریانس $(\sigma_{GH})^2$ را به صورت زیر مشخص می‌شود:

$$\sigma_{GH}^2 = \left[(p-q) \left\{ 1 - \frac{p-q}{2n_3} \right\} d_3^2 + \left\{ \frac{(p-q)^2 + 2}{4n_3^2} d_2^2 \right\} \right] \sigma_a^2 \quad (۸۴)$$

واریانس در حالت زیر بیشینه است:

$$h = (p-q) = \frac{2n_3}{2 - n_2 d_2^2 / n_3 d_3^2} \quad (۸۵)$$

و بیشینه عدم قطعیت استاندارد σ_{GH} به صورت زیر خواهد بود.

$$(\sigma_{GH})_{\max} = \frac{d_3 \sqrt{n_3} \sigma_a}{\sqrt{(2 - d_2^2 n_2 / n_3 d_3^2)}} \quad (۸۶)$$

• نقاط روی وجه میانی EF قرار دارند

با طی مراحل مشابه فوق واریانس اختلاف ارتفاع نقاط در امتداد خط EF به صورت زیر خواهد بود:

$$\sigma_{EF}^2 = \left[(p - q) \left\{ 1 - \frac{p - q}{2n_2} \right\} d_2^2 + \left\{ \frac{(p - q)^2}{4n_2^2} n_3 d_3^2 \right\} \right] \sigma_a^2 \quad (۸۷)$$

رابطه (۸۷) با جای‌گذاری n_3 به جای n_2 و d_3 به جای d_2 در رابطه (۸۴) حاصل شده است. واریانس در صورتی که $p - q = h$ حداکثر بوده و به صورت زیر است:

$$h = (p - q) = \frac{2n_2}{2 - n_3 d_3^2 / n_2 d_2^2} \quad (۸۸)$$

و بیشینه عدم قطعیت استاندارد برابر است با:

$$(\sigma_{EF})_{\max} = \frac{d_2 \sqrt{n_2} \sigma_a}{\sqrt{(2 - n_3 d_3^2 / n_2 d_2^2)}} \quad (۸۹)$$

نقاط روی دو خط مختلف

• یک نقطه روی قطر BD و دیگری روی وجه بزرگتر BA یا CD

اگر دو نقطه روی دو خط مختلف قرار داشته باشند فرض کنید یکی روی BD و دیگری روی BA سپس واریانس اختلاف ارتفاع $\sigma_{BA,BD}^2$ طی مراحل زیر بدست خواهد آمد.

- ارتفاع نقطه p -ام روی خط BD را بدست آورید؛ p از انتهای B شمارش می‌شود؛
- ارتفاع نقطه q -ام روی خط BA را بدست آورید؛ q نیز از انتهای B شمارش می‌شود؛
- اختلاف ارتفاع دو نقطه را بدست آورید؛ در دو حالت (الف) $p \geq n_1$ و (ب) $p \leq n_1$ ؛
- واریانس را محاسبه کنید.

با استفاده از اصل بیان شده در رابطه (۴۸) خواهیم داشت:

برای $p \geq n_1$

$$\sigma_{BA,BD}^2 = \left[q(1 - q/n_2) d_2^2 + \frac{q^2 n_1}{8n_2^2} d_1^2 \right] \sigma_a^2 + \left[\left(1 - \frac{p}{2n_1} \right) \left(p - \frac{qn_1}{n_2} \right) + \frac{q^2 n_1}{8n_2^2} \right] d_1^2 \sigma_a^2 \quad (90)$$

برای $p \leq n_1$

$$\sigma_{BA,BD}^2 = \left[q(1 - q/2n_2) d_2^2 + \frac{q^2 n_1}{8n_2^2} d_1^2 \right] \sigma_a^2 + \left[p \left(1 - \frac{q}{2n_2} - \frac{p}{2n_1} \right) + \frac{n_1 q^2}{8n_2^2} \right] d_1^2 \sigma_a^2 \quad (91)$$

روابط (۹۰) و (۹۱) برای نقاط روی CD و CA قابل استفاده هستند؛ p و q از انتهای C شمارش می‌شوند.

واریانس‌ها برای نقاط روی خطوط BD و BC یا AC و AD با جای‌گذاری n_2 به جای n_3 و d_2 به جای d_3 در معادلات (۹۰) و (۹۱) به‌دست می‌آیند. در این حالت p و q از انتهای B خطوط BD و BC شمارش می‌شوند. برای خطوط AC و AD شمارش p و q از انتهای A می‌باشد.

• نقاط روی قطرهای GH یا EF و هر خط دیگر غیر از قطرها

۱- یک نقطه روی BD و دیگری روی GH قرار دارد.

بر اساس سه مرحله ارائه شده، واریانس $\sigma_{GH,BD}^2$ مربوط به اختلاف ارتفاع دو نقطه به صورت زیر است:

برای $p \geq n_1$

$$\sigma_{GH,BD}^2 = \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_3} \right) d_3^2 + \frac{n_2}{2} \left\{ 1 + \frac{q}{n_3} \left(\frac{q}{2n_3} - 1 \right) \right\} d_2^2 + \left\{ \frac{3p}{2} - \frac{p^2}{2n_1} - \frac{3n_1}{4} \right\} d_1^2 \right] \sigma_a^2 \quad (92)$$

برای $p \leq n_1$

$$\sigma_{GH,BD}^2 = \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_3} \right) d_3^2 + \frac{n_2}{2} \left\{ 1 + \frac{q}{n_3} \left(\frac{q}{2n_3} - 1 \right) \right\} d_2^2 + \left\{ \frac{p}{2} - \frac{p^2}{2n_1} - \frac{n_1}{4} \right\} d_1^2 \right] \sigma_a^2 \quad (93)$$

معادلات (۹۲) و (۹۳) برای دو نقطه یکی روی قطر AC و دیگری روی قطر GH کاملاً صادق است.

۲- یک نقطه روی یکی از قطرهای و دیگری روی خط EF قرار دارد.

با جای‌گذاری n_3 به جای n_2 و d_3 به جای d_2 واریانس اختلاف ارتفاع دو نقطه صرف نظر از آن که یکی روی قطر و دیگری روی خط EF است به‌دست می‌آید.

برای $p \geq n_1$

$$\sigma_{\text{EF,BD}}^2 = \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_2} \right) d_2^2 + \frac{n_3}{2} \left\{ 1 + \frac{q}{n_2} \left(\frac{q}{2n_2} - 1 \right) \right\} d_3^2 + \left\{ \frac{3p}{2} - \frac{p^2}{2n_1} - \frac{3n_1}{4} \right\} d_1^2 \right] \sigma_a^2.$$

برای $p \leq n_1$

$$\sigma_{\text{EF,BD}}^2 = \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_2} \right) d_2^2 + \frac{n_3}{2} \left\{ 1 + \frac{q}{n_2} \left(\frac{q}{2n_2} - 1 \right) \right\} d_3^2 + \left\{ \frac{p}{2} - \frac{p^2}{2n_1} - \frac{n_1}{4} \right\} d_1^2 \right] \sigma_a^2.$$

• نقاط روی خطوط مرکزی EF و GH قرار دارند

ارتفاع نقطه p-ام روی GH از رابطه (۱۱) به صورت زیر است:

$$z_{\text{GH}p} = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - (p/2n_3) \sum_{r=0}^{r=2n_3} \alpha_r \right] + (p/2n_3)(f - c) + c \quad (94)$$

و ارتفاع نقطه q-ام روی EF به صورت زیر است:

$$z_{\text{EF}q} = d_2 \left[\sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r - (q/2n_2) \sum_{r=0}^{r=2n_2} \alpha_r \right] + (q/2n_2)(f' - c') + c' \quad (95)$$

بنابراین اختلاف ارتفاع دو نقطه به صورت زیر است.

$$\Delta_{\text{GH,EF}} = d_3 \left[\sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_3} \sum_{r=0}^{2n_3} \alpha_r \right] - d_2 \left[\sum_{r=0}^q \alpha_r - \frac{q}{2n_2} \sum_{r=0}^{2n_2} \alpha_r \right] + \frac{p}{2n_3}(f - c) - \frac{q}{2n_2}(f' - c') + (c - c') \quad (96)$$

معادله (۹۶) را می‌توان به صورت زیر نوشت.

$$\begin{aligned} \Delta_{\text{GH,EF}} = & d_3 \left[\left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) \sum_{r=0}^{r=p} \alpha_r - \frac{p}{2n_3} \sum_{r=p+1}^{2n_3} \alpha_r \right] \\ & + d_2 \left[\left(1 - \frac{q}{2n_2} \right) \sum_{r=0}^{r=q} \alpha_r - \frac{q}{2n_2} \sum_{r=q+1}^{2n_2} \alpha_r \right] + \frac{p}{2n_3}(f - c) - \frac{q}{2n_2}(f' - c') + (c - c'). \end{aligned} \quad (97)$$

واریانس سمت چپ برابر با مجموع تک تک واریانس‌های پنج عبارت سمت راست معادله (۹۷)

است. با استفاده از اصل واریانس‌های داده شده در رابطه (۴۸) واریانس‌های هر یک از موارد را

بدست می‌آوریم، بنابراین واریانس V_1 از عبارت اول به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{aligned} V_1 = & d_3^2 \left[\left(1 - \frac{p}{2n_3} \right)^2 p \sigma_a^2 + \frac{p^2}{4n_3^2} (2n_3 - p) \sigma_a^2 \right] \\ = & d_3^2 \sigma_a^2 \left[p - \frac{p^2}{n_3} + \frac{p^3}{4n_3^2} + \frac{p^2}{2n_3} - \frac{p^3}{4n_3} \right] = d_3^2 \sigma_a^2 \left[p \left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (98)$$

واریانس V_2 عبارت دوم نیز به صورت زیر خواهد بود.

$$V_2 = d_2^2 \sigma_\alpha^2 \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_2} \right) \right] \quad (99)$$

حال عبارت سوم می‌تواند به صورت زیر نوشته شود.

$$\text{Term}_3 = \frac{p}{2n_3} (f - c) = \frac{p}{2n_3} \left[\frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha'_r - \frac{1}{2} \sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r + \frac{1}{2} \sum_{n_1+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2,$$

واریانس V_3 این عبارت به صورت زیر خواهد بود.

$$= \frac{p^2 n_2 + 2 \sigma_\alpha^2}{4n_3^2}. \quad V_3 = \frac{p^2}{16n_3^2} d_2^2 \sigma_\alpha^2 (n_2 + n_2 + n_2 + n_2) \quad (100)$$

با جای‌گذاری n_2 به جای n_3 و d_2 به جای d_3 واریانس V_4 مربوط به عبارت چهارم به صورت زیر مشخص خواهد شد.

$$V_4 = \frac{q^2 n_3 d_3^2 \sigma_\alpha^2}{4n_2^2}. \quad (101)$$

حال عبارت پنجم می‌تواند به صورت مجموع و به شکل زیر نوشته شود:

$$c - c' = \frac{1}{2} \left[\sum_{r=0}^{r=n_2} \alpha_r - \sum_{r=n_2+1}^{2n_2} \alpha_r \right] d_2 - \frac{1}{2} \left[\sum_{r=0}^{r=n_3} \alpha_r - \sum_{r=n_3+1}^{2n_3} \alpha_r \right] d_3, \quad (102)$$

و واریانس V_5 مربوط به $c - c'$ به صورت زیر مشخص می‌شود.

$$V_5 = \frac{1}{4} (n_2 + n_2) + \frac{2}{2} \sigma_\alpha^2 + \frac{1}{4} (n_3 + n_3) d_3^2 \sigma_\alpha^2 \quad (103)$$

$$= \frac{1}{2} (n_2 d_2^2 + n_3 d_3^2) \sigma_\alpha^2$$

با ترکیب روابط (۹۸)، (۹۹)، (۱۰۰)، (۱۰۱) و (۱۰۳) $\sigma_{GH,EF}^2$ واریانس اختلاف ارتفاع دو نقطه یکی روی GH و دیگری روی EF به صورت زیر بدست می‌آید:

$$\sigma_{GH,EF}^2 = d_3^2 \sigma_\alpha^2 \left[p \left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) \right] + d_2^2 \sigma_\alpha^2 \left[q \left(1 - \frac{q}{2n_2} \right) \right]$$

$$+ \frac{p^2 n_2 d_3^2 \sigma_\alpha^2}{4n_3^2} + \frac{q^2 n_3 d_2^2 \sigma_\alpha^2}{4n_2^2} + \frac{1}{2} (n_2 d_2^2 + n_3 d_3^2) \sigma_\alpha^2.$$

$$\sigma_{GH,EF}^2 = \left[p \left(1 - \frac{p}{2n_3} \right) d_3^2 + q \left(1 - \frac{q}{n_2} \right) d_2^2 + \frac{p^2 n_2 d_3^2}{4n_3^2} + \frac{q^2 n_3 d_2^2}{4n_2^2} + \frac{1}{2} (n_2 d_2^2 + n_3 d_3^2) \right] \sigma_\alpha^2 \quad (۱۰۴)$$

ارزیابی نوع A عدم قطعیت

عدم قطعیت استاندارد اندازه‌گیری تغییرات زاویه‌ای که به صورت σ_α نشان داده می‌شود؛ با انجام قرائت‌های تکراری محاسبه می‌شود. ممکن است قرائت‌های تکراری برای یک نقطه در زمان‌های زیاد یا تکرارهای کم در نقاط مختلف روی سطح انجام شود. برای آزمایشگاه، تکرار قرائت برای تمام نقاط روی سطح و محاسبه واریانس و یادداشت آن می‌تواند آسان‌تر باشد. تکرار قرائت برای صفحات مسطح متعدد واریانس مختلط را نتیجه می‌دهد، که مجذور آن می‌تواند به عنوان عدم قطعیت استاندارد اندازه‌گیری زاویه‌ای مورد استفاده قرار گیرد. عدم قطعیت در اندازه‌گیری ارتفاع d برابر عدم قطعیت اندازه‌گیری زاویه‌ای خواهد بود. برای مثال d_I در مثال ارائه شده برابر با ۵۵ میلی‌متر و d_2 برابر با ۵۰ میلی‌متر است.

اگر σ_α انحراف معیار در اندازه‌گیری زاویه‌ای برابر با $۱۰^{-۵}$ رادیان باشد پس عدم قطعیت طبق ارزیابی نوع A برابر با $0.5 \mu m = 5 \times 10^{-5} mm$ است.

ارزیابی نوع B عدم قطعیت استاندارد

• عدم قطعیت قرائت دیجیتالی دستگاه اندازه‌گیری

در حالت عادی دستگاه اندازه‌گیری دارای تفکیک‌پذیری $(10 \mu m/m)$ یا $10 \mu rad$ است. به این معنی که مشاهدات می‌توانند در گستره $5 \mu rad$ باشند. با توجه به توزیع مستطیلی آن، عدم قطعیت استاندارد U_d قرائت دیجیتالی به صورت زیر ارائه می‌شود.

$$U_d = 5 \times 10^{-6} \cdot 50 mm / \sqrt{3} = 0.14 \mu m$$

عدم قطعیت گواهی نامه کالیبراسیون دستگاه اندازه‌گیری

عدم قطعیت ثبت شده در گواهی‌نامه $10 \mu rad$ با سطح اطمینان ۹۵٪ و ضریب پوشش ۱/۹۶ است. بنابراین عدم قطعیت استاندارد U_c به صورت زیر بیان می‌شود.

$$U_c = 10 \times 10^{-6} \times 50 mm / 1.96 = 0.26 \mu m$$

عدم قطعیت ناپایداری دستگاه اندازه‌گیری

مقدار تصدیق شده برای ناپایداری دستگاه اندازه‌گیری $10 \mu\text{rad}$ است. بنابراین عدم قطعیت آن برابر است با

$$U_c = 10 \times 10^{-6} \times 50 \text{ mm} / 1 / 96 = 0.26 \mu\text{m}$$

خطای عدم یکنواختی دما

اگر سطح صافی در دمای ثابتی نباشد، مخصوصاً در حالت عمودی، انبساط گرمایی ماده سطح بالایی صفحه در اثر تغییرات دما افزایش یا کاهش خواهد داشت. فرض کنید W ضخامت، t اختلاف دما و α ضریب گرمایی صفحه باشد بنابراین تغییرات ارتفاع به صورت زیر خواهد بود:

$$W.t.a$$

به عنوان مثال اگر مشخصات به صورت زیر باشد:

$$W = 15 \text{ cm}, t = 0.2^\circ \text{C}, \alpha = 11 / 5 \times 10^{-6} / ^\circ \text{C}$$

مؤلفه دمایی عدم قطعیت U_t برابر است با:

$$0.5 \times 0.15 \times 11 / 5 \times 10^{-6} = 0.345 \mu\text{m}$$

فرض کنید بالا یا پایین رفتن نقطه‌ای روی سطح با محدوده 0.345 دارای توزیع مستطیلی باشد. عدم قطعیت استاندارد ارتفاع U_t به صورت زیر خواهد بود:

$$U_t = 0.345 / \sqrt{3} = 0.199 \mu\text{m} = 0.20 \mu\text{m}$$

از این رو عدم قطعیت استاندارد مرکب برابر است با:

$$u_c = \sqrt{0.5^2 + 0.14^2 + 0.26^2 + 0.29^2 + 0.20^2} = 0.68 \mu\text{m}$$

درجه آزادی مؤثر

درجه آزادی مؤثر ν_{eff} به صورت زیر است:

$$\nu_{eff} = \frac{0.68^4}{0.5^2/9 + 0.14^2/\infty + 0.26^2/\infty + 0.29^2/\infty + 0.19^2/\infty} = 30/8$$

عدم قطعیت گسترده

با سطح اطمینان ۹۵٪ ضریب t برای ۳۱ درجه آزادی برابر با ۲/۰۱ است، پس عدم قطعیت گسترده U_e به صورت زیر خواهد بود:

$$U_e = 2/01 \times 0/68 \mu m = 1/36 \mu m$$

پیوست

اصطلاحات و واژه‌های عمومی اندازه‌شناسی

تعاریف ارایه شده از استاندارد ملی ۴۷۲۳ با عنوان "واژه‌نامه اندازه‌شناسی مفاهیم پایه و عمومی و اصطلاحات مربوط" گرفته شده است.

کمیت Quantity

خصیصه یک پدیده، یک جسم یا یک ماده که بتوان اندازه آن را به شکل یک عدد و یک مرجع بیان کرد.

یک مرجع می‌تواند یکای اندازه‌گیری، روش اجرایی اندازه‌گیری، ماده ی مرجع یا ترکیبی از آن‌ها باشد.

کمیت اصلی Base quantity

کمیتی در یک زیر مجموعه منتخب قراردادی از یک دستگاه کمیت‌های مورد نظر که هیچ‌یک از کمیت‌های زیرمجموعه را نتوان برحسب سایر کمیت‌ها بیان کرد.

کمیت فرعی Derived quantity

کمیتی که در یک دستگاه کمیت ها با تابعی از کمیت‌های پایه آن دستگاه تعریف می‌شود.

بعدکمیت Quantity dimension

عبارتی که وابستگی یک کمیت را به کمیت‌های اصلی یک دستگاه کمیت ها به صورت ضرب توانی عوامل متناظر با کمیت‌های اصلی آن دستگاه (با حذف عامل عددی) بیان می‌کند.

بعد کمیت نیرو به صورت $F = LMT^{-2}$ نشان داده می‌شود.

یکای اندازه‌گیری Measurement unit

یکای کمیت عددی حقیقی که براساس قرارداد تعریف و پذیرفته شده است و می‌توان آن را با سایر کمیت‌های هم نوع مقایسه کرد تا نسبت دوکمیت به شکل عدد، بیان شود.

یکای فرعی هماهنگ Coherent derived unit

یکای فرعی برای دستگاه کمیت‌های معین و مجموعه‌ای از یکاهای اصلی منتخب که حاصل توان یکاهای اصلی آن، فقط با ضرب تناسب یک باشد.

اگر متر، ثانیه و مول یکاهای اصلی باشند؛ متر بر ثانیه یکای فرعی هماهنگ برای سرعت است که سرعت با معادله‌ی کمیت $v = dr/dt$ تعریف شود و مول بر متر مکعب یکای فرعی هماهنگی برای غلظت مقدار ماده است در صورتی که غلظت مقدار ماده با معادله‌ی کمیت $c = n/V$ تعریف شود. کیلوگرم بر ساعت و گره در چنین سیستم کمیت ها یکاهای فرعی هماهنگ نیستند.

هر یکای فرعی ممکن است نسبت به یک سیستم کمیت ها، هماهنگ باشد؛ اما نسبت به سیستم دیگری هماهنگ نباشد. در سیستم یکاهای CGS سانتی متر بر ثانیه یکای فرعی هماهنگ برای سرعت است اما در SI چنین نیست.

دستگاه یکاهای هماهنگ Coherent system of units

دستگاه یکاها بر اساس یک دستگاه کمیت‌های معین که در آن یکای اندازه‌گیری هر کمیت فرعی، یک یکای فرعی هماهنگ است.

مقدار کمیت Quantity value

عدد و مرجعی که با هم بزرگی یک کمیت را بیان می کنند.

مقدار عددی کمیت Numerical quantity value

عددی که برای بیان مقدار یک کمیت استفاده می‌شود به غیر از عددی که به‌عنوان یک مرجع به کار می رود.

اندازه‌گیری Measurement

فرآیند تعیین یک یا چند مقدار کمیت که به طور تجربی و مستدل بتوان آن را به کمیت نسبت داد.

اندازه ده Measurand

کمیت مورد نظر برای اندازه‌گیری

تعیین مشخصات یک اندازه ده مستلزم آگاهی داشتن از نوع کمیت، توصیف وضعیت پدیده، جسم یا ماده حامل کمیت، هریک از مؤلفه های مربوط و موجودات شیمیایی دخیل است. در بعضی از استانداردها اندازه ده بصورت "کمیت ویژه ای که اندازه‌گیری می‌شود" تعریف شده است. اندازه‌گیری شامل سیستم اندازه‌گیری و شرایطی است که تحت آن اندازه‌گیری انجام می‌شود و ممکن است پدیده، جسم یا ماده را به گونه ای تغییر دهد که کمیت مورد اندازه‌گیری با اندازه ده تعریف شده، اختلاف پیدا کند. در چنین مواردی، اعمال تصحیح ضروری است. در شیمی، آنالیت یا

نام یک ماده یا ترکیب، واژه‌هایی است که گاهی اوقات برای "اندازه‌ده" استفاده می‌شود. استفاده از این واژه‌ها اشتباه است؛ زیرا به کمیت‌ها اشاره نمی‌کند.

مثال ۱: اختلاف پتانسیل بین ترمینال‌های یک باتری ممکن است هنگام استفاده از ولت متری با هدایت داخلی بالا در اندازه‌گیری، کاهش یابد. اختلاف پتانسیل مدار باز را می‌توان از طریق مقاومت‌های داخلی باتری و ولت متر به دست آورد.

مثال ۲: طول یک میله فولادی در تعادل با محیطی با دمای ۲۳ درجه سلسیوس با طول آن در دمای مشخص ۲۰ درجه سلسیوس (که اندازه‌ده است)، اختلاف دارد. در چنین مواردی، اعمال تصحیح ضروری است.

نتیجه اندازه‌گیری Measurement result

مجموعه مقادیر کمیتی که به اندازه‌ده نسبت داده می‌شود و هر اطلاعات مرتبط قابل دسترس دیگر را به همراه دارد.

نتیجه اندازه‌گیری معمولاً حاوی "اطلاعات مرتبط" درباره مجموعه مقادیر است، به طوری که بعضی از آنها می‌تواند نسبت به سایر مقادیر، بیشتر نماینده اندازه‌ده باشد. این امر می‌تواند به شکل تابع چگالی احتمال (PDF) بیان شود.

نتیجه‌ی اندازه‌گیری معمولاً برحسب یک مقدار اندازه‌گیری شده همراه با عدم قطعیت اندازه‌گیری بیان می‌شود. اگر عدم قطعیت اندازه‌گیری برای برخی مقاصد ناچیز باشد، نتیجه اندازه‌گیری را می‌توان به صورت یک مقدار بیان کرد. در بسیاری از زمینه‌ها، بیان نتیجه اندازه‌گیری به این شکل، معمول است.

مقدار واقعی کمیت True quantity value

مقدار کمیت مطابق با تعریف آن کمیت.

در رویکرد خطا برای توصیف اندازه‌گیری، مقدار واقعی، یک تک مقدار و در عمل، غیرقابل شناخت در نظر گرفته می‌شود. در رویکرد عدم قطعیت به علت این که جزئیات مربوط به تعریف کمیت بطور ذاتی ناکافی بوده و کامل نیست، یک تک مقدار واقعی وجود ندارد بلکه یک سری مقادیر واقعی سازگار با تعریف وجود دارد. با این وجود، در اصل و در عمل، این سری مقادیر نیز غیرقابل شناخت هستند. سایر رویکرد‌ها، مفهوم مقدار واقعی را کاملاً کنار گذاشته و اعتبار نتایج اندازه‌گیری را با کمک مفهوم قابلیت سازگاری اندازه‌شناختی، ارزیابی می‌کنند. در مورد ثابت‌های اساسی، کمیت را یک تک مقدار واقعی در نظر می‌گیرند. اگر عدم قطعیت تعریفی مربوط به اندازه‌ده در مقایسه با سایر مؤلفه‌های عدم قطعیت اندازه‌گیری ناچیز باشد، می‌توان اندازه‌ده را یک تک مقدار واقعی در نظر گرفت. GUM نیز پذیرفته است که کلمه "واقعی" زاید در نظر گرفته شود.

درستی اندازه‌گیری Measurement accuracy

نزدیکی توافق بین مقدار کمیت اندازه‌گیری شده و مقدار کمیت واقعی از یک اندازه‌ده. مفهوم "درستی اندازه‌گیری" یک کمیت نیست و با مقدار عددی بیان نمی‌شود. هر چه خطای اندازه‌گیری کوچکتر باشد، گفته می‌شود اندازه‌گیری درست تر است. واژه "درستی اندازه‌گیری" نباید برای "صحت اندازه‌گیری" و واژه "دقت اندازه‌گیری" نباید برای "درستی اندازه‌گیری" به کار رود، هرچند به هر دوی این مفاهیم مربوط می‌شود. درستی اندازه‌گیری "گاهی اوقات به صورت نزدیکی توافق بین مقادیر اندازه‌گیری شده‌ای که به اندازه‌ده نسبت داده شده‌اند، تفسیر می‌شود.

صحت اندازه‌گیری Measurement trueness

نزدیکی توافق بین میانگین حاصل از تعداد نامتناهی از مقادیر کمیت اندازه‌گیری شده تکراری و مقدار کمیت مرجع.

مفهوم "صحت اندازه‌گیری" یک کمیت نیست و بنابراین نمی‌توان آن را به صورت عددی بیان کرد، اما در استاندارد ملی شماره ۷۴۴۲ معیارهای مربوط به نزدیکی توافق داده شده است. صحت اندازه‌گیری به طور معکوس به خطای اندازه‌گیری سیستماتیک ارتباط پیدا می‌کند؛ اما ارتباطی با خطای اندازه‌گیری تصادفی ندارد.

دقت اندازه‌گیری Measurement precision

نزدیکی توافق بین نشاندهی‌ها یا مقادیر کمیت اندازه‌گیری شده حاصل تکرار اندازه‌گیری‌ها روی همان نمونه یا مشابه آن تحت شرایط مشخص است.

دقت اندازه‌گیری معمولاً به صورت عددی و برحسب عدم دقت تحت شرایط اندازه‌گیری خاص بیان می‌شود، مانند انحراف معیار، واریانس، یا ضریب واریانس. "شرایط مشخص" به عنوان مثال می‌تواند شرایط تکرارپذیری اندازه‌گیری، شرایط دقت میانی اندازه‌گیری یا شرایط تجدیدپذیری اندازه‌گیری باشد (ر. ک، استاندارد ملی ایران شماره ۳-۷۴۴۲) دقت اندازه‌گیری برای تعریف تکرارپذیری اندازه‌گیری، دقت میانی اندازه‌گیری و تجدیدپذیری اندازه‌گیری به کار می‌رود. گاهی اوقات به اشتباه واژه "دقت اندازه‌گیری" به مفهوم درستی اندازه‌گیری به کار می‌رود.

خطای اندازه‌گیری Measurement error

مقدار کمیت اندازه‌گیری شده منهای مقدار کمیت مرجع.

مفهوم "خطای اندازه‌گیری" را می‌توان برای دو حالت زیر به کار برد:

الف) وقتی یک تک مقدار مرجع وجود دارد و هنگامی به آن ارجاع می‌شود که کالیبراسیون توسط استاندارد اندازه‌گیری که مقدار کمیت اندازه‌گیری شده آن دارای عدم قطعیت اندازه‌گیری ناچیز است، انجام شده یا اگر یک مقدار کمیت قراردادی داده شده است که در این حالت خطای

اندازه‌گیری معلوم است؛

ب) اگر فرض شود اندازه ده از طریق یک تک مقدار کمیت واقعی یا یک مجموعه مقادیر واقعی با گستره‌ی ناچیز نشان داده می‌شود که در این حالت خطای اندازه‌گیری نامعلوم است. خطای اندازه‌گیری نباید با خطای تولید یا خطای انسانی اشتباه گرفته شود.

خطای اندازه‌گیری سیستماتیک Systematic measurement error

مؤلفه خطای اندازه‌گیری که در تکرار اندازه‌گیری‌ها ثابت می‌ماند یا با یک روند قابل پیش بینی تغییر می‌کند.

مقدار کمیت مرجع برای خطای اندازه‌گیری سیستماتیک برابر با یک مقدار کمیت واقعی، یا مقدار کمیت اندازه‌گیری شده یک استاندارد اندازه‌گیری با عدم قطعیت اندازه‌گیری قابل صرف نظر کردن یا مقدار کمیت قراردادی است. خطای اندازه‌گیری سیستماتیک و علل آن می‌تواند معلوم یا نامعلوم باشد. برای جبران یک خطای اندازه‌گیری سیستماتیک معلوم می‌توان تصحیح اعمال کرد. خطای اندازه‌گیری سیستماتیک برابر است با خطای اندازه‌گیری منهای خطای اندازه‌گیری تصادفی.

اریبی اندازه‌گیری Measurement bias

برآورد خطای اندازه‌گیری سیستماتیک.

خطای اندازه‌گیری تصادفی Random measurement error

مؤلفه خطای اندازه‌گیری که در تکرار اندازه‌گیری‌ها با یک روند غیرقابل پیش بینی تغییر می‌کند.

مقدار کمیت مرجع برای خطای اندازه‌گیری تصادفی، میانگین حاصل از تعداد زیادی اندازه‌گیری تکراری روی یک اندازه ده همسان است. خطاهای اندازه‌گیری تصادفی یک مجموعه از اندازه‌گیری‌های تکراری، تابع توزیعی را تشکیل می‌دهد که می‌تواند به امید ریاضی - که معمولاً "صفر فرض می‌شود - و واریانس آن خلاصه شود. خطای اندازه‌گیری تصادفی برابر است با خطای اندازه‌گیری منهای خطای اندازه‌گیری سیستماتیک.

عدم قطعیت اندازه‌گیری Measurement uncertainty

پارامتری غیرمنفی که پراکندگی مقادیر کمیت را که بر اساس اطلاعات مورد استفاده، به اندازه ده نسبت داده شده است مشخص می‌کند.

عدم قطعیت اندازه‌گیری شامل مولفه‌های ناشی از آثار سیستماتیک؛ مانند مؤلفه‌های مربوط به تصحیح‌ها و مقادیر کمیت تخصیص یافته‌ی استانداردهای اندازه‌گیری و همچنین عدم قطعیت تعریفی. گاهی اثرات سیستماتیک برآورد شده، تصحیح نمی‌شوند و به جای آن مولفه‌های عدم

قطعیت اندازه‌گیری مربوط گنجانده می‌شود. برای مثال، پارامتر می‌تواند انحراف معیار (یا مضرب مشخصی از آن) که عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد نامیده می‌شود، یا نیم پهنای بازه‌ای باشد که احتمال پوشش اظهار شده ای دارد. عدم قطعیت اندازه‌گیری عموماً از مؤلفه‌های زیادی تشکیل می‌شود. برخی از این مؤلفه‌ها را می‌توان از طریق ارزیابی نوع A عدم قطعیت اندازه‌گیری از روی توزیع آماری مقادیر حاصل از یک سری اندازه‌گیری‌ها ارزیابی کرده و با انحراف معیارها مشخص نمود. مؤلفه‌های دیگر، که آن‌ها را نیز می‌توان با انحراف معیارها مشخص کرد، از طریق ارزیابی نوع B عدم قطعیت اندازه‌گیری از روی توابع چگالی احتمال که بر پایه تجربه یا اطلاعات دیگر است، ارزیابی می‌شوند. بطور کلی برای مجموعه اطلاعات داده شده، بدیهی است که عدم قطعیت اندازه‌گیری مرتبط با یک مقدار کمی بیان شده است که به اندازه ده نسبت داده می‌شود. هر تغییری در این مقدار، منجر به تغییر در عدم قطعیت مربوط می‌شود.

عدم قطعیت تعریفی Definitional uncertainty

مؤلفه عدم قطعیت اندازه‌گیری که از جزئیات تعریف تعداد متناهی از اندازه‌ده به‌دست می‌آید. عدم قطعیت تعریفی حداقل عدم قطعیت اندازه‌گیری عملی است که در هر اندازه‌گیری به‌دست می‌آید. هرگونه تغییر در جزئیات توصیفی اندازه‌ده باعث رسیدن به عدم قطعیت تعریفی دیگری می‌شود. در استانداردهای ISO/IEC Guide 98-3:2008, D. 3. 4 و IEC 60359، به جای "عدم قطعیت تعریفی"، واژه "عدم قطعیت ذاتی" بکار رفته است.

ارزیابی نوع A عدم قطعیت اندازه‌گیری

Type A evaluation of measurement uncertainty

ارزیابی مؤلفه عدم قطعیت اندازه‌گیری از طریق تحلیل آماری مقادیر کمیت اندازه‌گیری شده که تحت شرایط اندازه‌گیری تعریف شده به‌دست آمده است.

ارزیابی نوع B عدم قطعیت اندازه‌گیری

Type B evaluation of measurement uncertainty

ارزیابی مؤلفه عدم قطعیت اندازه‌گیری که با روشی به جز ارزیابی نوع A عدم قطعیت اندازه‌گیری تعیین می‌شود.

مثال‌ها- ارزیابی بر پایه اطلاعات:

- مربوط به مقادیر کمیت منتشر شده‌ی رسمی؛
- مربوط به مقدار ماده مرجع گواهی شده؛
- حاصل از گواهی نامه کالیبراسیون؛
- رانش؛

- حاصل از رده‌ی درستی دستگاه اندازه‌گیری تصدیق شده؛

- حاصل از حدود استنباط شده در تجربه‌ی کارکنان.

عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد Standard measurement uncertainty

عدم قطعیت اندازه‌گیری که به صورت یک انحراف معیار بیان می‌شود.

عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد مرکب

Combined standard measurement uncertainty

عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد که با استفاده از عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری استاندارد

جداگانه مربوط به کمیت‌های ورودی در یک مدل اندازه‌گیری به‌دست می‌آید.

عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد نسبی

Relative standard measurement uncertainty

عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد تقسیم بر مقدار مطلق مقدار کمیت اندازه‌گیری شده.

بیان عدم قطعیت Uncertainty budget

اظهار عدم قطعیت اندازه‌گیری، مولفه‌های این عدم قطعیت، محاسبه و ترکیب آنها.

بیان عدم قطعیت باید شامل مدل اندازه‌گیری، برآوردها و عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری مربوط

به کمیت‌های مدل اندازه‌گیری، کوواریانس‌ها، نوع توابع چگالی احتمال به‌کار رفته، درجات آزادی،

نوع ارزیابی عدم قطعیت اندازه‌گیری و ضریب پوشش‌ها باشد.

عدم قطعیت اندازه‌گیری هدف Target measurement uncertainty

عدم قطعیت اندازه‌گیری که به عنوان حد بالایی مشخص شده و بر پایه‌ی استفاده مورد نظر از

نتایج اندازه‌گیری انتخاب شده است.

عدم قطعیت اندازه‌گیری گسترده Expanded measurement uncertainty

حاصل ضرب عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد مرکب در یک ضریب بزرگتر از یک.

این ضریب، بستگی به نوع توزیع احتمال کمیت خروجی در مدل اندازه‌گیری و نیز احتمال

پوشش انتخاب شده دارد. واژه‌ی "ضریب" در این تعریف به ضریب پوشش اشاره دارد.

عدم قطعیت اندازه‌گیری دستگاهی Instrumental measurement uncertainty

مولفه‌ای از عدم قطعیت اندازه‌گیری که از دستگاه اندازه‌گیری یا سیستم اندازه‌گیری مورد

استفاده ناشی می‌شود.

عدم قطعیت اندازه‌گیری دستگاهی از طریق کالیبراسیون دستگاه اندازه‌گیری یا سیستم

اندازه‌گیری به دست می‌آید به استثنای استاندارد اندازه‌گیری اولیه که به روش‌های دیگری مورد

استفاده قرار می‌گیرد. عدم قطعیت دستگاهی در ارزیابی نوع B عدم قطعیت اندازه‌گیری به‌کار می‌

رود. اطلاعات مربوط به عدم قطعیت اندازه‌گیری دستگاهی ممکن است در مشخصات دستگاه اندازه‌گیری ارایه شده باشد.

عدم قطعیت اندازه‌گیری صفر Null measurement uncertainty

عدم قطعیت اندازه‌گیری وقتی که مقدار کمیت اندازه‌گیری شده، صفر باشد. عدم قطعیت اندازه‌گیری صفر به نشاندگی صفر یا نزدیک به صفر مربوط می‌شود و بازه‌ای را پوشش می‌دهد که کسی نمی‌داند که آیا اندازه‌دهی برای آشکار سازی بسیار کوچک است یا نشاندگی دستگاه اندازه‌گیری ناشی از نوفه است. زمانی که اختلافی بین اندازه‌گیری نمونه و اندازه‌گیری خالی به دست می‌آید از مفهوم "عدم قطعیت اندازه‌گیری صفر" استفاده می‌شود.

بازه پوشش Coverage interval

بازه‌ای حاوی یک سری مقادیر واقعی کمیت یک اندازه‌دهی با احتمال اظهار شده، بر پایه‌ی اطلاعات موجود.

احتمال پوشش Coverage probability

احتمال این که یک مجموعه از مقادیر واقعی کمیت اندازه‌دهی در بازه پوشش مشخصی قرار گیرد.

عامل پوشش Coverage factor

عددی بزرگتر از یک که در عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد مرکب ضرب می‌شود تا عدم قطعیت اندازه‌گیری گسترده به دست آید.

کالیبراسیون Calibration

عملیاتی است که تحت شرایط مشخص انجام می‌شود. به طوری که در گام اول، بین مقادیر کمیت و عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری ارتباط برقرار می‌کند. این عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری توسط استانداردهای اندازه‌گیری و نشاندگی‌های متناظر، به همراه عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری مربوط فراهم می‌شود و در گام دوم، از این اطلاعات برای برقراری رابطه‌ای جهت دستیابی به نتیجه اندازه‌گیری از نشاندگی استفاده می‌شود.

کالیبراسیون می‌تواند با اظهاریه، تابع کالیبراسیون، نمودار کالیبراسیون، منحنی کالیبراسیون یا جدول کالیبراسیون بیان شود. در برخی حالات نیز مقدار تصحیح نشاندگی به صورت اضافه کردن یک مقدار یا ضرب در یک ضریب، همراه با عدم قطعیت اندازه‌گیری داده می‌شود. کالیبراسیون نباید با تنظیم سیستم اندازه‌گیری که اغلب اشتباهاً "خود کالیبراسیون" نامیده می‌شود و یا با تصدیق کالیبراسیون، اشتباه گرفته شود. اغلب مرحله‌ی اول در تعریف بالابه تنهایی به عنوان کالیبراسیون شناخته می‌شود.

قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی Metrological traceability

خصیصه‌ی یک نتیجه اندازه‌گیری که توسط آن می‌توان نتیجه را به یک مرجع از طریق زنجیره‌ی ناگسسته‌ی مستند کالیبراسیون‌ها ارتباط دارد که هر یک در عدم قطعیت اندازه‌گیری دخیل هستند.

واژه "مرجع" که در این تعریف آمده است، می‌تواند تعریف یکای اندازه‌گیری از طریق پدیدآوری عملی آن یا روش اجرایی اندازه‌گیری شامل یکای اندازه‌گیری برای یک کمیت غیر ترتیبی و یا استاندارد اندازه‌گیری باشد.

قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی نیاز به برقراری سلسله مراتب کالیبراسیون دارد. مشخصات مرجع باید شامل تاریخی که در آن، این مرجع برای برقراری سلسله مراتب کالیبراسیون به کار رفته است و نیز هر اطلاعات اندازه‌شناختی دیگری درباره مرجع؛ مانند این‌که چه موقع اولین کالیبراسیون در سلسله مراتب کالیبراسیون انجام شده است، باشد. در اندازه‌گیری‌هایی با بیش از یک کمیت ورودی در مدل اندازه‌گیری، هر یک از مقادیر ورودی باید خود قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی داشته باشد و توالی کالیبراسیون می‌تواند تشکیل یک ساختار انشعابی یا شبکه را بدهد. تلاش در برقراری قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی برای هر یک از کمیت ورودی باید متناسب با سهم مربوط به هر یک از آن‌ها در نتیجه اندازه‌گیری باشد. قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی یک نتیجه اندازه‌گیری این اطمینان را نمی‌دهد که عدم قطعیت اندازه‌گیری برای هدف مورد نظر مناسب است یا این‌که خطای انسانی وجود ندارد. مقایسه بین دو استاندارد اندازه‌گیری را در صورتی می‌توان کالیبراسیون در نظر گرفت که برای بررسی استفاده شود و در صورت لزوم مقدار اندازه‌گیری شده و عدم قطعیت اندازه‌گیری نسبت داده شده به یکی از استانداردهای اندازه‌گیری تصحیح گردد. طبق آنچه ILAC در نظر می‌گیرد عناصر مورد نیاز برای تایید قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی عبارتند از: یک زنجیره‌ی قابل ردیابی اندازه‌شناختی ناگسسته به یک استاندارد اندازه‌گیری بین‌المللی یا استاندارد اندازه‌گیری ملی، عدم قطعیت اندازه‌گیری مدون، روش اجرایی اندازه‌گیری مدون، تایید صلاحیت فنی، قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی به SI و بازه‌های کالیبراسیون (ILAC P-2002:10 را ببینید). واژه اختصاری "قابلیت ردیابی" گاهی اوقات با مفهوم "قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی" و نیز جنبه‌های دیگر مانند "قابلیت ردیابی نمونه" یا "قابلیت ردیابی مدرک" یا "قابلیت ردیابی دستگاه" یا "قابلیت ردیابی ماده" به کار می‌رود. بنابراین برای اجتناب از سردرگمی بهتر است واژه‌ی "قابلیت ردیابی اندازه‌شناختی" به‌طور کامل آورده شود.

قابلیت سازگاری اندازه‌شناختی نتایج اندازه‌گیری

Metrological compatibility of Measurement results

خصیصه‌ی یک مجموعه نتایج اندازه‌گیری مربوط به یک اندازه ده مشخص به‌طوریکه مقدار مطلق اختلاف مقادیر کمیت اندازه‌گیری شده برای هر جفت از نتایج اندازه‌گیری، کوچکتر از مضرب انتخاب شده‌ای از عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد مربوط به آن اختلاف باشد. قابلیت سازگاری اندازه‌شناختی نتایج اندازه‌گیری جایگزین مفهوم سنتی "ماندن در محدوده خطا" شده است که نشان‌دهنده معیاری برای تصمیم‌گیری روی آن است که آیا دو نتیجه‌ی اندازه‌گیری به همان اندازه‌ده یکسان دلالت می‌کند یا خیر. اگر یک نتیجه‌ی اندازه‌گیری در یک سری اندازه‌گیری اندازه ده (با فرض ثابت بودن آن)، سازگار با سایر نتایج نباشد، یا اندازه‌گیری درست نبوده است (مثلاً) ارزیابی شده است که عدم قطعیت اندازه‌گیری آن خیلی کوچک است و یا کمیت اندازه‌گیری شده در بین اندازه‌گیری‌ها تغییر کرده است. همبستگی بین اندازه‌گیری‌ها بر قابلیت سازگاری اندازه‌شناختی نتایج اندازه‌گیری تأثیر می‌گذارد. اگر اندازه‌گیری‌ها کاملاً ناهمبسته باشند، عدم قطعیت اندازه‌گیری استاندارد اختلاف آنها برابر با جمع ریشه‌ی دوم مربع میانگین عدم قطعیت‌های اندازه‌گیری استاندارد آنها است، در صورتی که برای کوواریانس مثبت، کوچکتر یا برای کوواریانس منفی، بزرگتر باشد.

منابع

- [1]- NASA-HDBK-8739. 19-3 Measurement Uncertainty Analysis Principles and Methods .
- [2]- William Navidi, Statistics for Engineers and Scientists Third edition, 2011
- [3]- Dunn, Patrick Measurement and data analysis for engineering and science, 2nd Ed, 2010
- [4]- S. V. Gupta, Measurement Uncertainties: Physical Parameters and Calibration of Instruments, 2012
- [5]- Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement, 1995
- [6]- Semyon G. Rabinovich, Measurement Errors and Uncertainties Theory and Practice, Third Edition, 2005
- [7]- Zeev B. Alfassi, Zvi Boger, Yigal Ronen, Statistical Treatment of Analytical Data, First published 2005
- [8]- Calibration Guide, EURAMET cg-19 Version 2. 1 (03/2012): guideline on the determination uncertainty in gravimetric volume calibration
- [9]- HANDBOOK OF UNCERTAINTY CALCULATIONS. The Norwegian Society Oil and Gas Measurement. March 2003
- ۱۰- استاندارد ملی ایران ۱۰۰۱۲: سیستم‌های مدیریت اندازه‌گیری- الزامات فرایندهای اندازه‌گیری و تجهیزات اندازه‌گیری. چاپ اول سال ۱۳۸۶



ناشر برگزیده کشور در سال ۹۲

Uncertainty of Measurement in Testing and Calibration

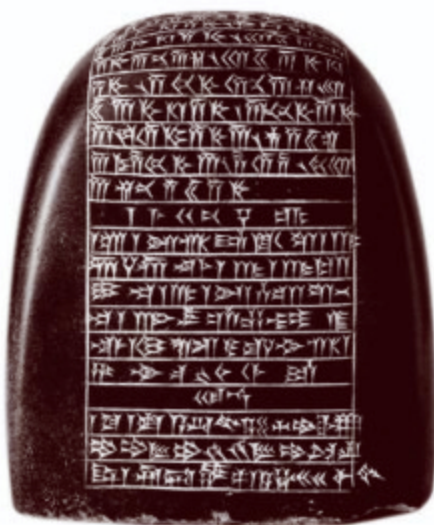
By:

Ahad Mohammadi Livari
Morteza Pooyan

در میان آثار عهد هخامنشی که در موزه ایران باستان در حال حاضر نگهداری می شود سنگ وزنه ای است که در سال ۱۳۱۶ خورشیدی به دست آمده است. این سنگ وزنه از سنگ تیره سبز و سخت به شکل جالب و زیبایی تراشیده و صیقلی شده است و روی آن به سه زبان رایج کتیبه های هخامنشی یعنی فارسی باستان، عیلامی و بابلی نوشته شده است. ترجمه متن فارسی کهن آن به شرح زیر است:

"۱۲۰ کارشا - من هستم داریوش شاه بزرگ، شاه شاهان، شاه کشورها، شاه این سرزمین، فرزند ویشتاسپ هخامنشی"

سنگ وزنه مزبور که جرم آن ۱۲۰ کارشا قیده گردیده تقریباً ۹ کیلو و ۹۹۵ گرم یعنی ۵ گرم کمتر از ده کیلوگرم است. بنابراین یک کارشا به طور تقریبی نزدیک به $83\frac{1}{3}$ گرم یا نزدیک به ۱۸ مثقال است.



سنگ وزنه داریوش اول کشف شده از خزانه تخت جمشید



سازمان انتشارات

آدرس فروش اینترنتی
www.jdbbook.ir

۴۶۰/۱-۱-۹۵